

FEUILLE D'EXERCICES 6 : NORMES DE MATRICES, CONDITIONNEMENT

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1. (Norme de Frobenius)

On rappelle que la norme de Frobenius d'une matrice $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|^2}$$

- (1) Montrer que la norme de Frobenius est une norme matricielle et qu'elle vérifie $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^*A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- (2) Montrer que la norme de Frobenius n'est pas une norme subordonnée.
- (3) Montrer que si $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unitaire et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$\|UA\|_F = \|AU\|_F = \|A\|_F.$$

- (4) Montrer que si A est une matrice normale, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, alors

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Exercice 2. (Normes subordonnées $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$)

On rappelle la définition des normes ℓ^∞ et ℓ^1 sur $\mathbb{K}^n \approx \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: pour tout $x = (x_1 \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

On note $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ les normes subordonnées sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \quad \text{et} \quad \|A\|_1 = \max_{x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$

Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\|_1 = \|A^*\|_\infty$.

Exercice 3. (Norme subordonnée à la norme 2)

On rappelle la définition du produit scalaire canonique sur $\mathbb{K}^n$ et de la norme associée :

pour tout $x = (x_1 \cdots, x_n), y = (y_1 \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$.

On note $\|\cdot\|_2$ la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\|A\|_2 = \max_{x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (1) Montrer que la norme 2 sur $\mathbb{K}^n$ est invariante par transformation unitaire : si U est tel que $U^*U = I_n$ alors, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 = \|U^*x\|_2$.
- (2) Montrer que la norme 2 subordonnée est invariante par transformation unitaire : si U est tel que $U^*U = I_n$, alors

$$\|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|AU\|_2 = \|U^*AU\|_2.$$

- (3) Montrer que si A est une matrice normale, alors $\|A\|_2 = \rho(A)$, où $\rho(\cdot)$ désigne le rayon spectral.
 (4) Montrer que $\|A\|_2 = \sqrt{\|A^*A\|_2}$.
 (5) Montrer que

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2.$$

- (6) *Conditionnement associé à la norme 2.*

On suppose A inversible et on considère la quantité $\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ appelée conditionnement de A associé à la norme 2. On note $0 < \mu_1(A) \leq \dots \leq \mu_n(A)$ les racines carrées ordonnées des valeurs propres de A^*A , i.e. les *valeurs singulières* de A .

(a) Montrer que $\text{cond}_2(A) = \frac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$.

- (b) On suppose de plus que A est une matrice normale et on note $\sigma(A)$ son spectre.

Montrer que $\text{cond}_2(A) = \frac{\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}$.

Exercice 4. (*Équivalence des normes et des conditionnements*)

- (1) Montrer que si deux normes vectorielles $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_\#$ vérifient $C_1 \|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_\# \leq C_2 \|\cdot\|_*$ pour un couple (C_1, C_2) de réels strictement positifs alors les normes subordonnées vérifient

$$\frac{C_1}{C_2} \|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_\# \leq \frac{C_2}{C_1} \|\cdot\|_*.$$

- (2) En utilisant les formules démontrées aux exercices précédents, montrer les relations suivantes pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quand c'est possible, donner les inégalités associées pour les conditionnements.

(a) $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$.

(b) $\max_{1 \leq i, j \leq n} |A_{i,j}| \leq \|A\|_2 \leq n \left(\max_{1 \leq i, j \leq n} |A_{i,j}| \right)$.

(c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$.

(d) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$.

(e) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_\infty \|A\|_1}$.

(f) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_p \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_p$ pour $p = 1$ et $p = \infty$.

Exercice 5. (*Norme et inversibilité*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme subordonnée associée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$.

(2) Soit $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $\|E\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|Ax + Ex\| \geq \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|E\| \right) \|x\|.$$

En déduire que $A + E$ est inversible.

- (3) Comment s'énonce le résultat qu'on vient de montrer si $A = I_n$?

Exercice 6. (*Interprétations du conditionnement*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

- (1) (a) Soit $b \in \mathbb{K}^n$ non nul et $\Delta b \in \mathbb{K}^n$. Soit $x, \Delta x \in \mathbb{K}^n$ définis par $Ax = b$ et $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Étant donné une norme subordonnée $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on rappelle que le conditionnement de A est défini par $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$. Montrer que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

- (b) Déterminer deux vecteurs b et Δb tels qu'on ait égalité entre les deux membres de l'inégalité précédente.
 (c) Montrer de même que si $Ax = b$ et $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$, alors

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

puis que l'on peut trouver un vecteur b non nul, une matrice ΔA et un vecteur Δx vérifiant les relations ci-dessus et tels qu'on ait égalité entre les deux membres de l'inégalité précédente.

- (2) (a) Montrer à l'aide de l'exercice précédent que, pour toute matrice singulière B , on a

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \leq \frac{\|A - B\|}{\|A\|}.$$

- (b) Soit $u \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|u\|_2 = 1$ et $\|A^{-1}u\|_2 = \|A^{-1}\|_2$. On pose $B_0 = A - \frac{u(A^{-1}u)^*}{\|A^{-1}\|_2^2}$.

Montrer que $\|A - B_0\|_2 = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$ et en déduire que

$$\frac{1}{\text{cond}_2(A)} = \min \left\{ \frac{\|A - B\|_2}{\|A\|_2} \mid B \text{ singulière} \right\}.$$

Autrement dit, plus une matrice est mal conditionnée, plus elle est proche d'être singulière donc difficile à inverser numériquement, et réciproquement.

- (3) (*Application : estimation du conditionnement*) On note pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}.$$

- (a) Résoudre le système $A_\varepsilon x = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 + \varepsilon \end{pmatrix}$
 (b) Donner à l'aide de la question (1) un minorant de $\text{cond}_1(A_\varepsilon)$ et comparer à sa valeur exacte.