

## FEUILLE D'EXERCICES 4 : ESPACES EUCLIDIENS

**Exercice 1.** Dans chacun des cas suivants, dire si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel  $E$ . Si c'est le cas, préciser la norme associée et écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(1) dans  $E = \mathbb{R}_n[X]$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), pour tout  $P, Q \in E$ ,

(a)  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x) dx$

(d)  $\langle P, Q \rangle = \int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x) e^{-x^2} dx$

(b)  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P'(x)Q'(x) dx$

(e)  $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=1}^n P(k)Q(k)$

(c)  $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(x)Q'(x) dx$

(f)  $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$

(2) dans  $E = M_n(\mathbb{R})$  ( $n \in \mathbb{N}^*$  avec  $n \geq 2$ ), pour tout  $A, B \in E$ ,

(a)  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$

(b)  $\langle A, B \rangle = \det(A^t B)$

**Exercice 2.** Soit  $E$  un espace euclidien,  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ ,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer les propriétés suivantes :

(1)  $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

(3)  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

(5)  $(F^\perp)^\perp = F$ .

(2)  $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

(4)  $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$

**Exercice 3.** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 1$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme associée  $\| \cdot \|$ . On note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $f$  est injectif et préserve l'orthogonalité : pour tout  $x, y \in E$ , si  $\langle x, y \rangle = 0$  alors  $\langle f(x), f(y) \rangle = 0$ .

(1) Montrer que pour tout  $i \neq j$ ,  $\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) \rangle = 0$ .

(2) En déduire que pour tout  $i \neq j$ ,  $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$ . On note  $\lambda$  cette valeur commune. Justifier que  $\lambda$  est non nul.

(3) Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$ . On dit que  $f$  est une similitude.

**Exercice 4.**

On munit  $\mathbb{R}_2[X]$  du produit scalaire suivant : pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ ,  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx$ .

À partir de la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  et en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormée de  $\mathbb{R}_2[X]$  pour ce produit scalaire.

**Exercice 5.**

- (1) Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur. Montrer que  $p$  est un projecteur orthogonal si, et seulement si,  $p$  est symétrique.
- (2) *Un exemple.* Montrer que la matrice  $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  est la matrice d'un projecteur orthogonal  $p$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Préciser le noyau et l'image de  $p$ .

**Exercice 6.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique.

- (1) Montrer que  $(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im}(A^t)$  et  $(\text{Im } A)^\perp = \text{Ker}(A^t)$ .
- (2) Montrer que  $A$  et  $A^t$  ont même rang.
- (3) Montrer que  $\text{Ker}(A^t A) = \text{Ker } A$ .
- (4) Montrer que  $\text{Im}(A^t A) = \text{Im}(A^t)$ .

**Exercice 7.** On munit  $\mathbb{R}^4$  du produit scalaire canonique et de la norme associée. On considère le sous-espace vectoriel

$$G = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_3 + x_4 = 0\}$$

- (1) Déterminer la dimension et une base orthonormée de  $G$ .
- (2) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^4$ , donner une expression explicite de la distance de  $x$  à  $G$ , définie par

$$d(x, G) = \inf\{\|x - y\|, y \in G\}.$$

**Exercice 8.** On considère l'espace vectoriel  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire  $(M, N) \in E^2 \mapsto \langle M, N \rangle = \text{tr}(M^t N)$ . On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (1) Déterminer une base orthonormée de  $F$ .
- (2) Calculer le projeté orthogonal de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $F^\perp$ .

**Exercice 9.** On veut calculer la quantité suivante, en s'assurant d'abord qu'elle est bien définie :

$$\delta = \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx.$$

- (1) Déterminer un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , un sous-espace vectoriel  $F$  et un élément  $u$  de  $E$  tels que  $\delta = d(u, F)^2$  où  $d(u, F) = \inf\{\|u - v\|, v \in F\}$ .
- (2) Calculer  $\delta$ .

**Exercice 10.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (1) Montrer qu'il existe un unique  $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$\int_0^1 H_n(x) P(x) dx = P'(1)$$

- (2) Calculer  $H_2$ .

**Exercice 11.** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $u_1, \dots, u_p$  des endomorphismes symétriques de  $E$  tels que

- $\text{rg } u_1 + \dots + \text{rg } u_p = n$
- pour tout  $x \in E$ ,  $\langle u_1(x), x \rangle + \dots + \langle u_p(x), x \rangle = \langle x, x \rangle$ .

- (1) Montrer que  $E = \text{Im } u_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } u_p$ .
- (2) Montrer que, pour tout  $k = 1, \dots, p$ ,  $u_k$  est un projecteur orthogonal.
- (3) Montrer que les  $\text{Im } u_k$  sont deux à deux orthogonaux.

**Exercice 12.** Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme associée  $\| \cdot \|$ . Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur.

- (1) Montrer que  $p$  est un projecteur orthogonal si, et seulement si, pour tout  $x \in E$ ,  $\|p(x)\| \leq \|x\|$ .
- (2) Si  $p$  n'est pas un projecteur orthogonal, construire un  $x_0 \in E$  tel que  $\|p(x_0)\| > \|x_0\|$ .

**Exercice 13.** On munit  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée. On note  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ . Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on définit la fonction suivante :

$$f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle Ax, x \rangle$$

- (1) (a) On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constitué des matrices symétriques et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel constitué des matrices antisymétriques. Montrer que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et écrire la décomposition correspondante de toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
 (b) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on note  $S_A$  sa partie symétrique. Montrer que  $f_A = f_{S_A}$ .
- (2) Dans la suite de l'exercice, on fixe  $A$  une matrice symétrique.  
 (a) Montrer que  $f_A$  est bornée sur  $S$  et atteint ses bornes sur  $S$ .  
 (b) On note  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$  la plus petite et la plus grande valeur propre de  $A$ . Montrer que

$$\lambda_{\min} = \min_{x \in S} f_A(x) \quad \text{et} \quad \lambda_{\max} = \max_{x \in S} f_A(x)$$

- (3) Dans cette question, on suppose de plus que  $A$  est définie positive, c'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  non nul,  $\langle Ax, x \rangle > 0$ .  
 (a) Montrer que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f_A(x) = +\infty$ .  
 (b) On note  $\Sigma_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_A(x) = 1\}$ . Montrer que  $\Sigma_A$  est non vide, fermé et borné dans  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ .
- (4) *Une application.* On définit  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1$  et on note  $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \text{ et } x_1 + \dots + x_n = 0\}$ .  
 (a) Soit  $M$  la matrice dont les coefficients  $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)$  valent 1 et les autres valent 0. Montrer que  $h = f_M$ , que  $M^n = I_n$  et que  $M^t = M^{n-1} = M^{-1}$ .  
 (b) Montrer que  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et calculer ses valeurs propres. On note  $(v_1, \dots, v_n)$  une base (dans  $\mathbb{C}^n$ ) de vecteurs propres de  $M$ .  
 (c) Montrer que pour tout  $k = 1, \dots, n$ , le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  obtenu en prenant la partie réelle de  $v_k$  est un vecteur propre de  $\frac{M+M^t}{2}$ , et donner la valeur propre associée.  
 (d) Montrer que  $h$  est majorée sur  $V$ , qu'elle atteint son maximum sur  $V$  et calculer ce maximum.