

Exercice 2. (Questions de cours)

- (1) Rappeler la définition de la norme de Frobenius $\|M\|_F$ d'une matrice $M = (M_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
- (2) Montrer que la norme de Frobenius sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une norme matricielle qui vérifie, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|M\|_F^2 = \text{tr}(M^*M)$.
- (3) La norme de Frobenius est-elle une norme subordonnée ? (Justifier).
- (4) Justifier que l'application $q : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \|M\|_F^2$ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3. On considère la forme quadratique sur $E = \mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique par

$$q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4zy$$

- (1) Exprimer la matrice de q dans la base canonique.
- (2) Déterminer le noyau de q .
- (3) Donner l'expression de la forme polaire de q dans la base canonique.
- (4) Quel est l'ensemble F des vecteurs (x, y, z) qui sont q -orthogonaux à $V_1 = e_1 = (1, 0, 0)$?
- (5) Montrer que $E = F \oplus \mathbb{R}e_1$.
- (6) Trouver deux vecteurs q -orthogonaux V_2 et V_3 de F qui sont linéairement indépendants.
- (7) Donner l'expression de q dans la base (V_1, V_2, V_3) .
- (8) En déduire la signature de q .
- (9) Retrouver cette signature en utilisant l'algorithme de Gauss pour réduire q .

Exercice 4.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, q et φ deux formes quadratiques sur E avec q définie positive. On suppose que q et φ sont représentées dans une même base $\mathcal{B}$ de E par deux matrices A et B .

Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

- (1) Il existe une base $\mathcal{C}$ de E qui est à la fois q -orthogonale et φ -orthogonale.
- (2) $A^{-1}B$ est diagonalisable.