

CONTRÔLE TERMINAL
MERCREDI 7 JANVIER 2026 – DURÉE : 2H

Aucun document n'est autorisé.

Aucun appareil électronique (en particulier un téléphone ou une calculatrice) n'est autorisé.

Les réponses devront être rédigées et argumentées avec soin.

L'énoncé comporte **5 exercices indépendants**.

La phrase qui apparaît à plusieurs endroits de l'énoncé vise à éviter la triche.

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -6 \\ -2 & -6 & 9 \end{pmatrix}$.

- (1) Justifier que A admet une unique décomposition LU.
- (2) Déterminer cette décomposition LU.
- (3) Utiliser cette décomposition pour résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (4) Justifier que A admet une factorisation de Cholesky et utiliser la décomposition LU pour la déterminer.

Exercice 2. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$q(x, y, z) = x^2 - 4xy + 2xz + 2y^2 - z^2$$

- (1) Exprimer q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
- (2) En justifiant les calculs, déterminer une base (a_1, a_2, a_3) de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q .
- (3) Exprimer la matrice de q dans la base (a_1, a_2, a_3) .
- (4) Identifier le cône isotrope de q .
- (5) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3. Soit B une matrice réelle d'ordre $n \geq 2$ telle qu'il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Bx, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de vecteurs définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = x_k - \theta(Bx_k - b) \end{cases}$$

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ le vecteur résidu $r_k = Bx_k - b$

- (1) Montrer que, pour tout vecteur $b \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire $Bx = b$ admet une unique solution $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.
- (2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $r_k = (I_n - \theta B)^k r_0$.
- (3) Justifier que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ si, et seulement si, la suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul. En utilisant un résultat de cours, en déduire la condition nécessaire et suffisante que doit satisfaire le rayon spectral $\rho(I_n - \theta B)$ de $I_n - \theta B$ pour que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$.
- (4) (Question de cours) Rappeler la définition de $\|\cdot\|_2$, la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\rho(I_n - \theta B) \leq \|I_n - \theta B\|_2$.
- (5) Montrer que si $\theta \in]0, \frac{2\alpha}{\|B\|_2^2}[$ alors la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$.

Exercice 4. On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et q une forme quadratique sur E .

- (1) Rappeler à quelle matrice simple (forme normale) on peut associer q lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, puis lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- (2) En déduire que l'ensemble $Q(E)$ des formes quadratiques sur E vérifie

$$Q(E) = \text{Vect}\{f^2, f \in E^*\}, \quad \text{où } E^* \text{ désigne le dual de } E.$$

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (pas nécessairement distinctes).

(1) Rappeler pourquoi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles.

On suppose que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ et on considère sur $\mathbb{C}^n$ une base orthonormée $(p_1, \dots, p_n)$ de vecteurs propres associés. Pour $k = 1, \dots, n$, on note V_k le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ engendré par les vecteurs p_i , $1 \leq i \leq k$. On pose par ailleurs $V_0 = \{0\}$. On appelle *quotient de Rayleigh* de la matrice A l'application

$$R_A : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$\forall x \neq 0, \quad R_A(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{x^* Ax}{x^* x}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire hermitien canonique sur $\mathbb{C}^n$ (linéaire à droite) et $x \in \mathbb{C}^n$ est identifié au vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

(2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $R_A(x) \in \mathbb{R}$.

(3) Soit U la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base canonique des vecteurs propres $p_1, \dots, p_n$. Justifier que U est unitaire.

(4) Montrer que la matrice $D = U^* A U$ coïncide avec $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$).

(5) Soit $y \in \mathbb{C}^n$ un vecteur non nul et soit z tel que $y = Uz$. Montrer que $R_A(y) = R_D(z)$.

(6) Soit $y = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i$ un vecteur de V_k et z tel que $y = Uz$. Montrer que $z = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(7) En déduire que, si $y = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i$ n'est pas nul, alors $R_A(y) = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2}$.

(8) En déduire que, pour tout $k = 1, \dots, n$,

(a) $\lambda_k = R_A(p_k)$.

(b) $\lambda_k = \max_{x \in V_k \setminus \{0\}} R_A(x)$

(c) $\lambda_k = \min_{x \perp V_{k-1}, x \neq 0} R_A(x)$

(9) En déduire que $\lambda_1 = \min_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} R_A(x)$ et $\lambda_n = \max_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} R_A(x)$.

(10) Déduire de ce qui précède le résultat suivant (vu en cours) : si M est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $\|M\|_2 = \sqrt{\rho(M^* M)}$, où $\rho(\cdot)$ désigne le rayon spectral et $\|\cdot\|_2$ est la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à la norme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^n$. Si M est non nulle, comment peut-on écrire $\|M\|_2$ en fonction des valeurs singulières de M ?