

CONTRÔLE TERMINAL – CORRIGÉ
MERCREDI 7 JANVIER 2026 – DURÉE : 2H

Aucun document n'est autorisé.

Aucun appareil électronique (en particulier un téléphone ou une calculatrice) n'est autorisé.

Les réponses devront être rédigées et argumentées avec soin.

L'énoncé comporte **5 exercices indépendants**.

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -6 \\ -2 & -6 & 9 \end{pmatrix}$.

- (1) Justifier que A admet une unique décomposition LU.

On calcule les déterminants mineurs principaux. $\det(1) = 1$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 4$, $\det(A) =$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$. Les trois déterminants mineurs principaux étant non nuls, A admet une unique factorisation LU.

- (2) Déterminer cette décomposition LU.

On raisonne par identification $A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$.

1ère colonne de L : $\ell_{21} \times 1 = 1$, $\ell_{31} \times 1 = -2$ donc $\ell_{21} = 1$, $\ell_{31} = -2$.

2e ligne de U : $\ell_{21} \times 1 + 1 \times u_{22} = 5$ d'où $u_{22} = 4$. $\ell_{21} \times (-2) + 1 \times u_{23} = -6$ donc $u_{23} = -4$.

2e colonne de L : $\ell_{31} \times 1 + \ell_{32} \times u_{22} = -6$ d'où $\ell_{32} = -1$.

3e ligne de U : $\ell_{31} \times (-2) + \ell_{32} \times u_{23} + 1 \times u_{33} = 9$ d'où $u_{33} = 1$.

donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, i.e. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (3) Utiliser cette décomposition pour résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On veut résoudre $LUx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on pose $y = Ux$ et on résout d'abord $L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

C'est un système triangulaire inférieur, on utilise donc une méthode de descente pour obtenir

$y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$. On résout ensuite $U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. C'est un système

triangulaire supérieur, on obtient facilement par méthode de remontée la solution $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (4) Justifier que A admet une factorisation de Cholesky et utiliser la décomposition LU pour la déterminer. A est symétrique et ses trois déterminants mineurs principaux sont strictement positifs donc, par le critère de Sylvester, A est définie positive. Elle admet donc une unique

factorisation de Cholesky. Soit D la matrice diagonale dont les éléments diagonaux coïncident avec ceux de U . On a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On définit $D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on calcule

$$Q = LD^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Par un résultat de cours, la factorisation de Cholesky de } A$$

$$\text{est } A = QQ^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$q(x, y, z) = x^2 - 4xy + 2xz + 2y^2 - z^2$$

- (1) Exprimer q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

On applique l'algorithme de réduction de Gauss. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $q(x, y, z) = (x - 2y + z)^2 - 4y^2 + 4yz - z^2 + 2y^2 - z^2 = (x - 2y + z)^2 - 2(y^2 - 2yz + z^2) = (x - 2y + z)^2 - 2(y - z)^2$. Par construction, les formes linéaires $\ell_1 : (x, y, z) \mapsto x - 2y + z$ et $\ell_2 : (x, y, z) \mapsto y - z$ sont indépendantes et on a $q = \ell_1^2 - 2\ell_2^2$.

- (2) En justifiant les calculs, déterminer une base (a_1, a_2, a_3) de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q .

Comme ℓ_1 et ℓ_2 sont des formes linéaires indépendantes, la famille (ℓ_1, ℓ_2) est une famille libre de l'espace dual $(\mathbb{R}^3)^*$. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (e_1^*, e_2^*, e_3^*) la base duale canonique. On a $\ell_1 = e_1^* - 2e_2^* + e_3^*$ et $\ell_2 = e_2^* - e_3^*$. La matrice des coordonnées en ligne de ℓ_1 et ℓ_2 dans la base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Il est facile de compléter cette

matrice pour obtenir une matrice carrée inversible : la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est

inversible donc la famille (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) avec $\ell_3 = e_3^*$ est une famille libre de $(\mathbb{R}^3)^*$, donc une base. Déterminons sa base antéduale, on sait d'après un résultat du cours que cette base est q -orthogonale. On cherche donc une famille (a_1, a_2, a_3) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant les relations de dualité $\ell_i(a_j) = \delta_i^j$. Soit N la matrice des coordonnées en colonnes des vecteurs a_1, a_2, a_3 dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) . Les relations de dualité précédentes se traduisent matriciellement par $MN = I_3$, donc N est l'inverse de M . Comme M est triangulaire supérieure, on l'inverse

facilement par remontée : si $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $c = z$, $b = y + c = y + z$,

$a = 2b - c + x = x + 2y + z$, donc $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les colonnes de cette matrice donnent les

coordonnées des vecteurs a_1, a_2, a_3 dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) : $a_1 = (1, 0, 0) = e_1$, $a_2 = (2, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1)$.

- (3) Exprimer la matrice de q dans la base (a_1, a_2, a_3) .

La matrice de q dans la base (a_1, a_2, a_3) est la matrice $(\varphi_q(a_i, a_j))_{1 \leq i, j \leq 3}$ où φ_q est la forme polaire de q . Comme $q = \ell_1^2 - 2\ell_2^2$ et comme la base (a_1, a_2, a_3) est q -orthogonale et antéduale

de (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) , on en déduit que la matrice de q dans la base (a_1, a_2, a_3) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (4) Identifier le cône isotrope de q .

Soit $z = (\alpha, \beta, \gamma)$ un point exprimé dans la base (a_1, a_2, a_3) . On a $q(z) = \ell_1^2(z) - 2\ell_2^2(z) = \alpha^2 - 2\beta^2$ donc z est dans le cône isotrope de q si, et seulement si, $\alpha^2 = 2\beta^2$, i.e. $\alpha = \sqrt{2}\beta$.

ou $\alpha = -\sqrt{2}\beta$. On en déduit que le cône isotrope c_q de q est l'union des deux plans $\{(-\sqrt{2}\beta, \beta, \gamma), \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \cup \{(\sqrt{2}\beta, \beta, \gamma), \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$, i.e.

$$c_q = \text{Vect}((-\sqrt{2}, 1, 0), (0, 0, 1)) \cup \text{Vect}((\sqrt{2}, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

où les vecteurs sont exprimés dans la base (a_1, a_2, a_3) .

- (5) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $a'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}a_2$. Comme (a_1, a_2, a_3) est q -orthogonale et a'_2 est colinéaire à a_2 , la base (a_1, a'_2, a_3) est également q -orthogonale. En outre, $q(a'_2) = \frac{1}{2}q(a_2) = -1$. La matrice de q dans la base (a_1, a'_2, a_3) est celle demandée.

Exercice 3. Soit B une matrice réelle d'ordre $n \geq 2$ telle qu'il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Bx, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de vecteurs définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = x_k - \theta(Bx_k - b) \end{cases}$$

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ le vecteur résidu $r_k = Bx_k - b$

- (1) Montrer que, pour tout vecteur $b \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire $Bx = b$ admet une unique solution $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Montrons que B est inversible. Soit x tel que $Bx = 0$. On a $\langle Bx, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2$, donc $\|x\| = 0$, d'où $x = 0$. B est injective, donc bijective.

Remarque : la matrice B n'étant pas nécessairement symétrique, on ne peut pas utiliser les résultats vus pour les matrices symétriques définies positives. En particulier, B peut avoir des valeurs propres complexes non réelles.

- (2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $r_k = (I_n - \theta B)^k r_0$. On remarque que, pour tout $k \geq 1$, $x_k = x_{k-1} - \theta(Bx_{k-1} - b) = x_{k-1} - \theta r_{k-1}$. On a donc $r_k = Bx_k - b = Bx_{k-1} - \theta Br_{k-1} - b = r_{k-1} - \theta Br_{k-1} = (I_n - \theta B)r_{k-1}$. On en déduit par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $r_k = (I_n - \theta B)^k r_0$.

- (3) Justifier que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ si, et seulement si, la suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul. En utilisant un résultat de cours, en déduire la condition nécessaire et suffisante que doit satisfaire le rayon spectral $\rho(I_n - \theta B)$ de $I_n - \theta B$ pour que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$.

On a $b = B\bar{x}$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $r_k = B(x_k - \bar{x})$. B étant inversible, l'application linéaire $z \in \mathbb{R}^n \mapsto Bz$ est un homéomorphisme donc $r_k \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_k \rightarrow \bar{x}$. Comme la suite (r_k) vérifie $r_k = (I_n - \theta B)^k r_0$, on sait d'après un résultat de cours que la suite converge quel que soit r_0 si, et seulement si, $\rho(I_n - \theta B) < 1$. On en déduit par équivalence des convergences que c'est la condition nécessaire et suffisante pour que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ quel que soit x_0 .

- (4) (Question de cours) Rappeler la définition de $\|\cdot\|_2$, la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\rho(I_n - \theta B) \leq \|I_n - \theta B\|_2$.

La norme subordonnée $\|\cdot\|_2$ est définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|M\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2=1} \|Mx\|_2$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Pour prouver que $\rho(I_n - \theta B) \leq \|I_n - \theta B\|_2$, le plus simple est de passer par la norme $\|\cdot\|_{2,\mathbb{C}}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à la norme hermitienne canonique $\|\cdot\|_{2,\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}^n$. Soit λ une valeur propre (dans $\mathbb{C}$) de $I_n - \theta B$ telle que $|\lambda| = \rho(I_n - \theta B)$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. On a $\|Mx\|_{2,\mathbb{C}} = \|\lambda x\|_{2,\mathbb{C}} = |\lambda| \|x\|_{2,\mathbb{C}} = \rho(I_n - \theta B) \|x\|_{2,\mathbb{C}}$. On déduit de la définition de la norme subordonnée que

$\rho(I_n - \theta B) \leq \|I_n - \theta B\|_{2,\mathbb{C}}$. On utilise alors le fait que, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_{2,\mathbb{C}} = \|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$, et on peut conclure que

$$\rho(I_n - \theta B) \leq \|I_n - \theta B\|_{2,\mathbb{R}} = \|I_n - \theta B\|_2.$$

Remarque 1 : rappelons pourquoi, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|\cdot\|_{2,\mathbb{C}} = \|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$. En effet, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors, d'après un résultat vu en cours et comme $M^t M$ est une matrice réelle symétrique, $\|M\|_{2,\mathbb{C}} = \rho(M^* M) = \rho(M^t M) = \|M\|_{2,\mathbb{R}}$. Une autre façon de prouver que $\|\cdot\|_{2,\mathbb{C}} = \|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fait appel à la complexification de $\|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$.

Remarque 2 : on pourrait aussi résoudre l'exercice en considérant les vecteurs réels dans $\mathbb{C}^n$ et les matrices réelles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{2,\mathbb{C}}$, les raisonnements qui suivent sont alors identiques et évitent d'utiliser le fait que $\|\cdot\|_{2,\mathbb{C}} = \|\cdot\|_{2,\mathbb{R}}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (5) Montrer que si $\theta \in]0, \frac{2\alpha}{\|B\|_2^2}[$ alors la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$.

D'après les questions précédentes, il suffit que $\|I_n - \theta B\|_2 < 1$ pour qu'on ait $\rho(I_n - \theta B) < 1$ qui assure la convergence de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vers $\bar{x}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_2 = 1$. Comme $\langle Bx, x \rangle = \langle x, Bx \rangle$, on a

$$\|(I_n - \theta B)x\|_2^2 = \|x\|_2^2 - 2\theta \langle Bx, x \rangle + \theta^2 \|Bx\|_2^2$$

Or $\langle Bx, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2$ et $\|Bx\|_2^2 \leq \|B\|_2^2 \|x\|_2^2$ donc

$$\|(I_n - \theta B)x\|_2^2 \leq (1 - 2\theta\alpha + \theta^2 \|B\|_2^2) \|x\|_2^2 = 1 - 2\theta\alpha + \theta^2 \|B\|_2^2.$$

En prenant le sup sur tous les $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\|_2 = 1$, on en déduit que $\|B\|_2^2 \leq 1 - 2\theta\alpha + \theta^2 \|B\|_2^2$. Or $1 - 2\theta\alpha + \theta^2 \|B\|_2^2 < 1$ si, et seulement si, $\theta^2 \|B\|_2^2 - 2\theta\alpha < 0$ ce qui, pour $\theta > 0$, équivaut à $\theta < \frac{2\alpha}{\|B\|_2^2}$. On en déduit que, si $\theta \in]0, \frac{2\alpha}{\|B\|_2^2}[$, alors $\|I_n - \theta B\|_2 < 1$, donc $\rho(I_n - \theta B) < 1$, donc $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\bar{x}$ pour tout x_0 .

Exercice 4. On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et q une forme quadratique sur E .

- (1) Rappeler à quelle matrice simple (forme normale) on peut associer q lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, puis lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

D'après les théorèmes de classification des formes quadratiques, la forme normale d'une

forme quadratique réelle est $\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où (s, t) est la signature de q . La forme normale

d'une forme quadratique complexe q est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où r est le rang de q .

- (2) En déduire que l'ensemble $Q(E)$ des formes quadratiques sur E vérifie

$$Q(E) = \text{Vect}\{f^2, f \in E^*\}, \quad \text{où } E^* \text{ désigne le dual de } E.$$

Montrons d'abord que $Q(E) \subset \text{Vect}\{f^2, f \in E^*\}$. On peut le prouver de deux façons.

Méthode 1: L'algorithme de réduction de Gauss permet d'écrire toute forme quadratique sur E comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. Or une forme linéaire est un élément de E^* , d'où la conclusion.

Méthode 2: On écrit explicitement cette dépendance. On suppose d'abord que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\dim E = n$. Soit $q \in Q(E)$ et (s, t) sa signature.

Il existe une base $(a_1, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_{s+t}, a_{s+t+1}, \dots, a_n)$ de E dans laquelle la matrice

de q est $\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $(a_1^*, \dots, a_s^*, a_{s+1}^*, \dots, a_{s+t}^*, a_{s+t+1}^*, \dots, a_n^*)$ la base duale. On

déduit de l'expression de la matrice que $q = \sum_{k=1}^s [a_k^*]^2 - \sum_{k=s+1}^{s+t} [a_k^*]^2$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si $q \in Q(E)$ est de rang r , il existe une base $(a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_n)$ dans laquelle la matrice de q est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $(a_1^*, \dots, a_r^*, a_{r+1}^*, \dots, a_n^*)$ la base duale. On a $q = \sum_{k=1}^r [a_k^*]^2$.

On en déduit dans les deux cas que $Q(E) \subset \text{Vect}\{f^2, f \in E^*\}$.

Réciproquement soit q un élément de $\text{Vect}\{f^2, f \in E^*\}$ et $\mathcal{E}$ une base de E . Si tout élément x de E est représenté comme $x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{E}}$ dans la base $\mathcal{E}$, alors la fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto q(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction polynomiale homogène de degré 2 en les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$. C'est donc une forme quadratique.

On conclut que $Q(E) = \text{Vect}\{f^2, f \in E^*\}$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (pas nécessairement distinctes).

- (1) Rappeler pourquoi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. On a $\langle Ax, x \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \lambda x, x \rangle_{\mathbb{C}} = \bar{\lambda} \|x\|_2^2$. On a aussi, comme A est hermitienne, $\langle Ax, x \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, A^* x \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, Ax \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, \lambda x \rangle_{\mathbb{C}} = \lambda \|x\|_2^2$. Or $x \neq 0$, donc $\lambda = \bar{\lambda}$, donc $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ et on considère sur $\mathbb{C}^n$ une base orthonormée $(p_1, \dots, p_n)$ de vecteurs propres associés. Pour $k = 1, \dots, n$, on note V_k le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ engendré par les vecteurs p_i , $1 \leq i \leq k$. On pose par ailleurs $V_0 = \{0\}$. On appelle *quotient de Rayleigh* de la matrice A l'application

$$R_A : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$\forall x \neq 0, \quad R_A(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{x^* Ax}{x^* x}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire hermitien canonique sur $\mathbb{C}^n$ (linéaire à droite) et $x \in \mathbb{C}^n$ est identifié au vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

- (2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $R_A(x) \in \mathbb{R}$.

On a, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\langle x, Ax \rangle = \langle Ax, x \rangle$. On a également, comme A est hermitienne, $\langle x, Ax \rangle = \langle A^* x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle$. On en déduit que $\langle x, Ax \rangle \in \mathbb{R}$. Comme on a par ailleurs $\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2 \in \mathbb{R}$, on conclut que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $R_A(x) \in \mathbb{R}$.

- (3) Soit U la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base canonique des vecteurs propres $p_1, \dots, p_n$. Justifier que U est unitaire.

U coïncide avec la matrice de passage $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{P}}(\text{id})$ entre la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{C}^n$ et la base $\mathcal{P} = (p_1, \dots, p_n)$. C'est une matrice de passage entre deux bases orthonormées de $\mathbb{C}^n$ donc U est unitaire.

- (4) Montrer que la matrice $D = U^* A U$ coïncide avec $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$).

On a par définition, pour tout $1 \leq k \leq n$, $A p_k = \lambda_k p_k$. On reconnaît alors les deux matrices $(A p_1 \dots A p_n) = A U$ et $(\lambda_1 p_1 \dots \lambda_n p_n) = U D$, donc $A U = U D$. On multiplie à gauche par U^* et, comme U est unitaire, on obtient $U^* A U = D$.

- (5) Soit $y \in \mathbb{C}^n$ un vecteur non nul et soit z tel que $y = U z$. Montrer que $R_A(y) = R_D(z)$.

On a $R_A(y) = \frac{\langle y, A y \rangle}{\langle y, y \rangle} = \frac{\langle U z, A U z \rangle}{\langle U z, U z \rangle} = \frac{\langle z, U^* A U z \rangle}{\langle z, U^* U z \rangle} = \frac{\langle z, D z \rangle}{\langle z, z \rangle} = R_D(z)$.

- (6) Soit $y = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i$ un vecteur de V_k et z tel que $y = Uz$. Montrer que $z = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a $U^*U = I_n$ donc, pour tout $1 \leq i \leq n$, $U^*p_i = e_i$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique.

Comme $y = Uz$, on a $z = U^*y = \sum_{i=1}^k \alpha_i U^*p_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

- (7) En déduire que, si $y = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i$ n'est pas nul, alors $R_A(y) = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2}$.

On a $R_A(y) = R_D(z) = \frac{\langle z, Dz \rangle}{\langle z, z \rangle}$. Or $Dz = \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \lambda_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\langle z, Dz \rangle = \sum_{i=1}^k \overline{\alpha_i} \lambda_i \alpha_i =$

$\sum_{i=1}^k \lambda_i |\alpha_i|^2$. En outre, $\langle z, z \rangle = \|z\|^2 = \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2$, d'où la conclusion.

- (8) En déduire que, pour tout $k = 1, \dots, n$,

(a) $\lambda_k = R_A(p_k)$.

(b) $\lambda_k = \max_{x \in V_k \setminus \{0\}} R_A(x)$

(c) $\lambda_k = \min_{x \perp V_{k-1}, x \neq 0} R_A(x)$

(a) On choisit, pour tout $1 \leq i \leq k-1$, $\alpha_i = 0$, et on pose $\alpha_k = 1$ et $y = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i = p_k$.

D'après ce qui précède, $R_A(y) = R_A(p_k) = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2} = \lambda_k$.

(b) Pour un choix arbitraire de $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ non tous nuls, on a en utilisant $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$

$R_A(\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i) = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2} \leq \lambda_k \frac{\sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^k |\alpha_i|^2} = \lambda_k$. On en déduit que, pour tout $x \in V_k \setminus \{0\}$, $R_A(x) \leq \lambda_k$. La question précédente permet de conclure que $\lambda_k = \max_{x \in V_k \setminus \{0\}} R_A(x)$.

(c) La base $(p_1, \dots, p_n)$ étant orthonormée, un élément $x \perp V_{k-1}$ est de la forme $x =$

$\sum_{i=k}^n \alpha_i p_i$. En raisonnant comme précédemment, on a, si $x \neq 0$, $R_A(x) = \frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i |\alpha_i|^2}{\sum_{i=k}^n |\alpha_i|^2} \geq$

$\lambda_k \frac{\sum_{i=k}^n |\alpha_i|^2}{\sum_{i=k}^n |\alpha_i|^2} = \lambda_k$. Et cette borne inférieure est atteinte pour $x = p_k$, on a donc bien $\lambda_k = \min_{x \perp V_{k-1}, x \neq 0} R_A(x)$.

- (9) En déduire que $\lambda_1 = \min_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} R_A(x)$ et $\lambda_n = \max_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} R_A(x)$.

On applique (c) avec $k = 1$: comme $V_0 = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = \mathbb{C}^n$, on a bien $\lambda_1 = \min_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} R_A(x)$.

On applique ensuite (b) avec $k = n$: comme $V_n = \mathbb{C}^n$, on a bien $\lambda_n = \max_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} R_A(x)$.

- (10) Déduire de ce qui précède le résultat suivant (vu en cours) : si M est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $\|M\|_2 = \sqrt{\rho(M^*M)}$, où $\rho(\cdot)$ désigne le rayon spectral et $\|\cdot\|_2$ est la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à la norme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^n$. Si M est non nulle, comment peut-on écrire $\|M\|_2$ en fonction des valeurs singulières de M ?

On considère la matrice $A = M^*M$. Elle est hermitienne, elle est aussi positive puisque, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\langle Ax, x \rangle = \langle M^*Mx, x \rangle = \langle Mx, Mx \rangle = \|Mx\|_2^2 \in \mathbb{R}^+$. Ses valeurs propres sont donc réelles et positives, on les ordonne : $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. En particulier, $\rho(A) = \lambda_n$. On déduit de ce qui précède que

$$\rho(A) = \lambda_n = \max_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} R_A(x) = \max_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|^2} = \max_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\langle x, M^*Mx \rangle}{\|x\|^2} = \max_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|^2}{\|x\|^2}$$

Or $\|M\|_2^2 = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|^2}{\|x\|^2}$ donc $\|M\|_2^2 = \rho(A) = \rho(M^*M)$ d'où $\|M\|_2 = \sqrt{\rho(M^*M)}$. Comme les valeurs singulières $s_1, \dots, s_\ell$ de M sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de M^*M , on en déduit que, si M est non nulle,

$\|M\|_2$ = plus grande valeur singulière de M .