Université Claude Bernard Lyon 1 — Année universitaire 2025-2026
Département de Mathématiques — L3 Mathématiques
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

CONTRÔLE PARTIEL
VENDREDI 14 NOVEMBRE 2025 – DURÉE : 1H30

Aucun document n'est autorisé.
Aucun appareil électronique (en particulier un téléphone ou une calculatrice) n'est autorisé.
Les réponses devront être rédigées et argumentées avec soin.
L'énoncé comporte 5 exercices indépendants.

Exercice 1. On appelle matrice stochastique une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall i, j \in \{1, \cdots, n\} \quad P_{ij} \geq 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \cdots, n\} \quad \sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1.$$

(1) Montrer que $\lambda = 1$ est une valeur propre de P et en donner un vecteur propre.

(2) Rappeler pourquoi, si μ est une valeur propre de P, alors pour toute norme subordonnée $\|\!| \cdot |\!\|$, on a $\|\!|P|\!\| \geq |\mu|$.

(3) On considère la norme subordonnée ∞. Montrer que $\|\!|P|\!\|_\infty = 1$ et en déduire le rayon spectral de P.

Exercice 2. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par la formule

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy + 2xz - 4yz.$$

(1) Décomposer q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. En déduire le rang et la signature de q.

(2) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q et donner la matrice de q dans cette base.

Exercice 3. Soit E un espace hermitien de dimension n et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension m. On note p_F la projection orthogonale sur F.

(1) Que vaut le rang de p_F ?

(2) Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \|p_F(e_i)\|^2$.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\varphi : (A, B) \in E \times E \mapsto \mathrm{tr}(A^t\, B)$. On considère le sous-espace vectoriel $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

(1) Déterminer une base orthonormée de $G^\perp$.

(2) Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $G^\perp$.

Exercice 5.

(1) Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que son cône isotrope est réduit à $\{0\}$. Montrer que q est soit définie positive sur E, soit définie négative.

(2) On fixe maintenant $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

  (a) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $P^t\, P$ est une matrice symétrique définie positive.

  (b) Soit S une matrice symétrique définie positive et q_S la forme quadratique associée. Montrer qu'il existe une matrice Q inversible telle que $S = Q^t\, Q$.

  (c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, il existe une matrice S symétrique définie positive telle que $A^t = S^{-1} A S$.