Université Claude Bernard Lyon 1
Département de Mathématiques

Année universitaire 2025-2026
L3 Mathématiques
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

CONTRÔLE PARTIEL – CORRIGÉ
VENDREDI 14 NOVEMBRE 2025 – DURÉE : 1H30

Aucun document n'est autorisé.
Aucun appareil électronique (en particulier un téléphone ou une calculatrice) n'est autorisé.
Les réponses devront être rédigées et argumentées avec soin.
L'énoncé comporte 5 exercices indépendants.

Exercice 1. On appelle matrice stochastique une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall i, j \in \{1, \cdots, n\} \quad P_{ij} \geq 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \cdots, n\} \quad \sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1.$$

(1) Montrer que $\lambda = 1$ est une valeur propre de P et en donner un vecteur propre. Il suffit de considérer le vecteur $u = (1, \ldots, 1)$. En identifiant ce vecteur avec la matrice colonne de ses coordonnées, on voit que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $(Pu)_i = \sum_j P_{ij} u_j = \sum_j P_{ij} = 1$, donc $Pu = u$. Ainsi, 1 est valeur propre de P et $u = (1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre associé.

(2) Rappeler pourquoi, si μ est une valeur propre de P, alors pour toute norme subordonnée $\|\cdot\|$, on a $\|P\| \geq |\mu|$.

Notons $\|\cdot\|$ la norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$ à laquelle est subordonnée la norme $\|\cdot\|$. Soit v, avec $\|v\| = 1$, un vecteur propre associé à la valeur propre μ. On a $\|Pv\| = \|\mu v\| = |\mu|$. Or $\|P\| = \max_{\{w, \|w\|=1\}} \|Pw\| \geq \|Pv\|$ donc $\|P\| \geq |\mu|$.

(3) On considère la norme subordonnée ∞. Montrer que $\|P\|_\infty = 1$ et en déduire le rayon spectral de P. D'après un résultat de cours, $\|P\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |P_{ij}|$. Or, pour tous i, j, $P_{ij} \geq 0$ donc $\|P\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$ car P est stochastique. D'après les questions précédentes, 1 est valeur propre de P et, pour toute valeur propre μ de P, $1 = \|P\|_\infty \geq |\mu|$. On en déduit que $\rho(P) = 1$.

Exercice 2. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par la formule

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy + 2xz - 4yz.$$

(1) Décomposer q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. En déduire le rang et la signature de q. On applique la méthode de réduction de Gauss. On a $q(x, y, z) = (x - y + z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz + 2y^2 + 5z^2 - 4yz = (x - y + z)^2 + y^2 + 4z^2 - 2yz = (x - y + z)^2 + (y - z)^2 + 3z^2$. Les trois formes linéaires $\ell_1 : (x, y, z) \mapsto x - y + z$, $\ell_2 : (x, y, z) \mapsto y - z$ et $\ell_3 : (x, y, z) \mapsto z$ sont, par construction, indépendantes. On déduit du théorème de Sylvester que la signature de q est $(3, 0)$ et son rang est $3 + 0 = 3$.

(2) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q et donner la matrice de q dans cette base. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (e_1^*, e_2^*, e_3^*) sa base duale canonique. Les trois formes linéaires s'écrivent dans cette base duale :

$$\ell_1 = e_1^* - e_2^* + e_3^* \qquad \ell_2 = e_2^* - e_3^* \qquad \ell_3 = e_3^*$$

La famille $\mathcal{B}^* = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est libre d'après la question précédente, elle forme donc une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ et les coordonnées de ses vecteurs dans la base duale, écrites en ligne, donnent la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver les vecteurs de la base antéduale, il suffit de considérer la matrice B de leurs coordonnées (en colonnes) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Les relations de dualité se traduisent matriciellement par $AB = I_3$, donc B est l'inverse de A. Après calcul, on obtient

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On lit en colonnes les coordonnées dans la base canonique des éléments de la base antéduale $\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}^*$. Ces éléments sont les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$. Comme

$$q = \ell_1^2 + \ell_2^2 + 3\ell_3^2,$$

la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit E un espace hermitien de dimension n et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension m. On note p_F la projection orthogonale sur F.

(1) Que vaut le rang de p_F ? p_F est à valeurs dans F et comme, pour tout $u \in F$, $p_F(u) = u$, on en déduit que p_F est surjective, i.e $p_F(E) = F$. Or F est de dimension m donc $\mathrm{rg}(p_F) = m$.

(2) Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E. Calculer $\sum_{i=1}^n \|p_F(e_i)\|^2$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, $\|p_F(e_i)\|^2 = \langle p_F(e_i), p_F(e_i)\rangle = \langle e_i, p_F^* \circ p_F(e_i)\rangle = \langle e_i, p_F \circ p_F(e_i)\rangle = \langle e_i, p_F(e_i)\rangle$ car p_F est un projecteur orthogonal donc p_F est auto-adjoint et $p_F \circ p_F = p_F$. Comme la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthonormée, les quantités $\langle e_i, p_F(e_i)\rangle$ coïncident avec les éléments diagonaux de la matrice P représentant p_F dans la base (e_i). On a donc

$$\sum_{i=1}^n \langle e_i, p_F(e_i)\rangle = \mathrm{tr}(P).$$

Or p_F est un projecteur, donc P est hermitienne, donc diagonalisable en base orthonormée. Notons D la matrice diagonale associée, on a $\mathrm{tr}(D) = \mathrm{rg}(p_F)$ et comme la trace est un invariant de similitude, on a $\mathrm{tr}(P) = \mathrm{tr}(D) = \mathrm{rg}(p_F) = m$ donc

$$\sum_{i=1}^n \|p_F(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i, p_F(e_i)\rangle = m$$

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\varphi : (A, B) \in E \times E \mapsto \mathrm{tr}(A^t\, B)$. On considère le sous-espace vectoriel $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

(1) Déterminer une base orthonormée de $G^\perp$. Soit $(E_1, \dots, E_4)$ la base canonique de E, i.e.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un élément $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ de G se décompose dans la base comme $A = a(E_1 + E_4) + b(E_2 - E_3)$, donc $G = \mathrm{vect}(E_1 + E_4, E_2 - E_3)$ est de dimension 2. Comme (E, φ) est un espace euclidien, on a $E = G \oplus G^\perp$, donc $\dim(G^\perp) = 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$ et $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ un élément de $G^\perp$. On a $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^t\, B) = xa - bz + yb + at = 0$ donc $a(x+t) + b(y-z) = 0$. Cette égalité doit être vraie pour tous a, b, donc $x = -t$ et $y = z$. Les éléments de $G^\perp$ sont donc de la forme $B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$, i.e $B = x(E_1 - E_4) + y(E_2 + E_3)$. Une base de $G^\perp$ est donc $(E_1 - E_4, E_2 + E_3) = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$. On remarque que

$$\mathrm{tr}((E_1 - E_4)^t(E_2 + E_3)) = \mathrm{tr}((E_1 - E_4)(E_2 + E_3)) = \mathrm{tr}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) = 0,$$

donc $(E_1 - E_4, E_2 + E_3)$ est une base orthogonale de $G^\perp$. La norme associée à φ est la norme de Frobenius $\|\cdot\|_F$, et on a $\|E_1 - E_4\|_F = \|E_2 + E_3\|_F = \sqrt{2}$. On en déduit qu'une base orthonormée de $G^\perp$ est

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

(2) Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $G^\perp$.

La base $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 - E_4, E_2 + E_3)$ de $G^\perp$ étant orthonormée, on sait par un résultat de cours que le projeté orthogonal $p_G(J)$ de J sur G est

$$p_G(J) = \varphi(J, \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 - E_4))\frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 - E_4) + \varphi(J, \frac{1}{\sqrt{2}}(E_2 + E_3))\frac{1}{\sqrt{2}}(E_2 + E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.

(1) Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que son cône isotrope est réduit à $\{0\}$. Montrer que q est soit définie positive sur E, soit définie négative. On applique le théorème de Sylvester : il existe $r, s > 0$ tels que $r + s \leq n$ et signature$(q) = (r, s)$. Comme 0 est le seul élément isotrope de q, on a nécessairement $r + s = n$ donc il existe une base dans laquelle la matrice de la forme quadratique est $M_q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$. Supposons que $0 < r < s$. Il suffit alors de considérer le vecteur u dont les $2r$ premières coordonnées valent 1, et les autres valent 0. En identifiant u et la matrice colonne de ses coordonnées, on voit que $q(u) = u^t M_q u = r - r = 0$, cela contredit l'hypothèse que 0 est le seul vecteur isotrope. Dans le cas où $0 < s < r$, il suffit de considérer le vecteur v dont les $2s$ dernières coordonnées valent 1, les premières valant 0, et on a $q(v) = v^t M_q v = s - s = 0$. A nouveau, c'est contradictoire. On en déduit que soit $r = 0$ et $s = n$ (donc q est définie négative), soit $r = n$ et $s = 0$ (donc q est définie positive).

(2) On fixe maintenant $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $P^t P$ est une matrice symétrique définie positive. On a $(P^t P)^t = P^t (P^t)^t = P^t P$ donc $P^t P$ est symétrique. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a, en identifiant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ et en utilisant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$,

$$\langle P^t PX, X\rangle = \langle PX, PX\rangle = \|PX\|^2 \geq 0.$$

En outre si $\|PX\|^2 = 0$ alors $PX = 0$. Or P est inversible donc $X = 0$. On en déduit que $P^t P$ est symétrique définie positive.

(b) Soit S une matrice symétrique définie positive et q_S la forme quadratique associée. Montrer qu'il existe une matrice Q inversible telle que $S = Q^t Q$. Comme q_S est définie positive, il existe une base dans laquelle sa matrice est I_n d'après le théorème de Sylvester. S et I_n sont congruentes donc il existe une matrice Q de changement de base (donc une matrice inversible) telle que $S = Q^t I_n Q = Q^t Q$.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, il existe une matrice S symétrique définie positive telle que $A^t = S^{-1}AS$. Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice P inversible et une matrice D telles que $A = P\,D\,P^{-1}$. On a donc $A^t = (P^{-1})^t\,D^t\,P^t = (P^{-1})^t\,D\,P^t = (P^{-1})^t\,P^{-1}\,A\,P\,P^t$. D'après la première question (on l'applique à P^t), $P\,P^t$ est symétrique définie positive. Notons $S = P\,P^t$, on a bien $A^t = S^{-1}AS$.

Réciproquement, supposons qu'il existe S symétrique définie positive telle que $A^t = S^{-1}AS$. On a donc $AS = S\,A^t = (AS)^t$ car S est symétrique. La matrice $B = AS$ est donc symétrique et $A = BS^{-1}$. Or S^{-1} est symétrique et définie positive, puisque S l'est, donc d'après la question précédente, il existe une matrice Q inversible telle que $S^{-1} = Q^t\,Q$. On obtient donc

$$A = B\,Q^t\,Q = Q^{-1}\,Q\,B\,Q^t\,Q.$$

La matrice $Q\,B\,Q^t$ est symétrique réelle, donc diagonalisable. Comme A est semblable à $Q\,B\,Q^t$, elle est également diagonalisable.