Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2024-2025
L3 Mathématiques
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

CONTRÔLE PARTIEL
VENDREDI 8 NOVEMBRE 2024 – DURÉE : 1H30

Aucun document n'est autorisé.
Aucun appareil électronique (en particulier un téléphone ou une calculatrice) n'est autorisé.
Les réponses devront être rédigées et argumentées avec soin.
L'énoncé comporte 5 exercices indépendants.

Exercice 1. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par la formule

$$q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2.$$

(1) Décomposer q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. En déduire le rang et la signature de q.

(2) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q, puis donner la matrice de q dans cette base.

(3) Pour un réel a, on note $v_a = (a, -1, 1)$ et F_a l'orthogonal de v_a pour q.

   (a) Quelle est la dimension de F_a ?

   (b) À quelle condition sur a a-t-on $\mathbb{R}^3 = F_a \oplus \mathbb{R}v_a$?

Exercice 2. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$q(x) = x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_3.$$

(1) Donner la forme polaire de la forme quadratique q, puis sa matrice dans la base canonique.

(2) À l'aide de l'algorithme de Gauss, calculer la signature de q.

(3) Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q soit $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$?

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère sur $\mathbb{R}_n[X]$ la forme quadratique donnée par

$$q(P) = \int_0^1 P^2(x)dx - \left(\int_0^1 P(x)dx\right)^2.$$

(1) Montrer que q est positive.

(2) Quelle est sa signature ?

Exercice 4. On veut calculer la quantité $\quad \delta = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}(t^2 - (at + b))^2 \,\mathrm{d}t.$

(1) Pourquoi est-ce que δ est bien défini ?

(2) Déterminer un espace euclidien E, un sous-espace vectoriel F et un élément u de E tels que $\delta = d(u, F)^2$, où $d(u, F) = \inf\{\|u - v\| \,:\, v \in F\}$.

(3) Calculer δ. (On pourra utiliser sans justification la formule $n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} \,\mathrm{d}t$.)

Exercice 5. Soit E un espace hermitien. On note j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$. Pour x et y dans E, exprimer en fonction de $\|x\|$ et $\|y\|$ la quantité

$$\|x + y\|^2 + \|x + jy\|^2 + \|x + j^2y\|^2.$$