Feuille de TD 7

La table pour les valeurs de la fonction de repartition de la loi normale se trouve sur la feuille TD5.

Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$: tableau de valeurs de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ telles que $\displaystyle\int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \rho_{\mathcal{N}(0,1)}(x)dx = 1-\alpha$

$1-\alpha$	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99
$z_{\frac{\alpha}{2}}$	1.28	1.44	1.645	1.96	2.58

Loi de Student à n de degrés de liberté $\mathcal{T}(n)$: tableau de valeurs de $t(n)_{\frac{\alpha}{2}}$ t.q. $\displaystyle\int_{-t(n)_{\frac{\alpha}{2}}}^{t(n)_{\frac{\alpha}{2}}} \rho_{\mathcal{T}(n)}(x)dx = 1-\alpha$

n	8	9	10	11
$t(n)_{0.025}$	2.306	2.262	2.228	2.201
$t(n)_{0.05}$	1.860	1.833	1.812	1.796

Exercice 7.1 Déterminer l'intervalle de confiance à 90% pour la moyenne μ d'une population, si l'échantillon a une taille de $n = 63$, une moyenne de 81.3 et une variance de 33.64 (n est suffisament grand pour faire l'approximation par une loi normale).

Exercice 7.2 Une compagnie pharmaceutique veut savoir si le procédé de fabrication qu'elle utilise fournit effectivement des comprimés dosés à 5mg de principe actif d'un medicament. L'écart type est estimé à 0,07mg. La quantité de principe actif est mesurée pour 100 comprimés. On a trouvé que le dosage moyen de principe actif est de 4,85 mg.
Peut-on dire avec une confiance de 95% que le processus donne le dosage prévu ? (n est suffisament grand pour faire l'approximation par une loi normale.)

Exercice 7.3 On aimerait estimer la quantité de phosphate (en mg/l) en moyenne dans l'eau d'un lac. Les études des années précédentes laissent supposer que le contenu du phosphate fluctue autour de sa moyenne suivant une loi normale avec un écart type $\sigma = 4$mg/l. Combien de tests d'eau faut-il faire pour être à 90% sûr que l'erreur de l'estimation ne dépasse pas 0.8mg/l ?

Exercice 7.4 On suppose que la température moyenne au mois d'août à Paris suit une loi normale de μ et σ inconnus. Durant neuf années consécutives autour de 2000 on a mesuré les valeurs

$$(22, 19, 21, 23, 20, 22, 24, 18, 20)$$

1. Calculer la moyenne et l'écart-type sans biais de l'échantillon.
2. Déterminer un intervalle de confiance de niveau 95% pour la moyenne.
3. Déterminer la même chose en approximant la loi de Student par une loi normale. L'approximation par une loi normale est-elle justifiée ?

Exercice 7.5 Le staff médical d'une grande entreprise fait ses petites statistiques sur le taux de cholestérol de ses employés ; les observations sur 100 employés tirés au sort sont les suivantes.

taux de cholestérol en cg	120	160	200	240	280	320
effectif d'employés	9	22	25	21	16	7

1. Calculer la moyenne et l'écart-type sans biais de l'échantillon.
2. Déterminer un intervalle de confiance de niveau 95% pour la moyenne.
3. Déterminer la taille minimum d'échantillon pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit inférieure à 10.

Exercice 7.6 On veut étudier la proportion p de gens qui boivent du thé chaque jour. On prend donc un échantillon de taille $n = 100$. Soit N le nombre de personnes dans l'échantillon qui boivent du thé chaque jour.

1. Quelle est la loi de N ? Quelle est la moyenne de N ? Quelle est la variance de N ?
2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de N ? En déduire une approximation de la loi de $F = N/n$.
3. On observe une proportion $f = 0.1$ de gens qui boivent du thé chaque jour. Donnez l'intervalle de confiance pour p, de niveau de confiance $1 - \alpha$ pour $1 - \alpha = 90\%, 95\%, 99\%$.

Exercice 7.7 Dans un sac de 10000 billes il y a r billes rouges le autres étant noir. On tire au hazard 100 billes et trouve 30 billes rouges. En déduire un intervalle de confiance de niveau 95% pour r.