Examen final de Mathématiques 3, L2 PCSI

Lundi 6 janvier 2025, 8h-10h (durée 2h)

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. (**Questions de Cours** 2 points)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs avec $u_n > 0$ pour n assez grand.

1. Rappeler la **règle de d'Alembert** sur la nature de la série
2. Rappeler la **règle de Cauchy** sur la nature de la série

Exercice 2. (4 points)

Soit $E[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On munit E du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} PQ\,dX$

1. Montrer que la famille $\{1, X, X^2\}$ forme une base E.
2. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt cette base.

Exercice 3. (5 points)

Pour $a \in \mathbb{R}^*$, soit la matrice $P_a = \begin{pmatrix} 4 & a & a \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique associé à P_a
2. Trouver les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de P_a
3. Montrer que P_a n'est pas diagonalisable.

Exercice 4. (5 points)

1. Déterminer le rayon de convergence des séries réelles suivantes

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(2n)!} x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt{n}}{2^n+1} x^{2n}$$

2. Étudier le domaine de convergence (c'est-à-dire les réels x pour lesquels on a convergence) des séries réelles suivantes

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2} x^n$$

Exercice 5. (4 points)

Donner la nature des séries numériques suivantes

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n^3+1)^{1/3}}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

Exercice 6. (**Bonus** (3 points))

Développer en séries entières au voisinage de 0 les fonctions suivantes

$$f(x) = (4+x^2)^{-3/2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(1+x-2x^2).$$