

Fascicule d'exercices, Mathématiques 3 - PCSI

Table des matières

Fiche 1 - Espaces vectoriels, applications linéaires	2
Fiche 2 - Matrices, déterminants	4
Fiche 3 - Systèmes d'équations linéaires	7
Fiche 4 - Réduction des endomorphismes	9
Fiche 5 - Produit scalaire, diagonalisation	13
Fiche 6 - Suites et séries numériques	16
Fiche 7 - Séries entières	19
Fiche 8 - Séries entières - équations différentielles	21

Fiche 1 - Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}, \quad E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}, \\ E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \quad E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}.$$

Exercice 2.

1. Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$? Sont-ils générateurs de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base ?
2. Mêmes questions pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.
3. Mêmes questions pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Mêmes questions pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les sous-ensembles

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\} \text{ et } F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}.$$

Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et que $E \oplus F = \mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit f l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f . Quelle est sa dimension ?
3. En déduire le rang de f .

Exercice 5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(\vec{e}_1) = 13\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_2) = -8\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \quad f(\vec{e}_3) = -12\vec{e}_1 - 12\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3,$$

où $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que $F_1 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ et $F_2 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la dimension de chacun d'eux.
2. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Exercices supplémentaires

Exercice 6. Pour tous les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E :

- a) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$
- b) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$
- c) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$
- d) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$
- e) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$
- f) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \text{ et } z = x\}$

Dans les cas où F est un sous-espace vectoriel de E , indiquer sa nature géométrique.

Exercice 7. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F le sous-ensemble de E des applications f qui vérifient $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit H l'ensemble des applications $x \mapsto ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E et montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 8.

1. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non colinéaires l'un à l'autre (c'est-à-dire tels que pour tout réel λ , on ait $u \neq \lambda v$ et $v \neq \lambda u$). Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par u et v est égal à $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire la description complète des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les familles $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ et $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ sont libres.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Déterminer une base de F .
3. Soit G le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{W} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4)$. Déterminer une base de G .

Exercice 10. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires (avec $a \in \mathbb{R}$) :

- a) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (y, x)$
- b) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (x, a)$
- c) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (ax, ay)$
- d) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \longmapsto (x + a, y + a)$
- e) $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \longmapsto (x + z, y + z)$
- f) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \longmapsto (2x, 0, x - y)$
- g) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \sin x$

Exercice 11. On considère $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3.$$

1. Déterminer l'image par f d'un élément $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
3. Montrer que $f \circ f = f$.

Fiche 2 - Matrices, déterminants

Exercice 12. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? En calculer au moins deux.

Exercice 13. On considère les matrices A, B, C, D définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A + B$, AB , AD , λA , $A - \lambda C$, où λ est un nombre réel quelconque.
2. Calculer $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$. A-t-on $\det(AB) = \det(BA)$?

Exercice 14. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

(donnés en composantes dans cette base).

1. Montrer de deux façons différentes que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.
2. En déduire que $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Écrire un vecteur quelconque $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}^2$ sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$. En déduire la matrice des composantes $M_{\mathcal{C}}(\vec{w})$ du vecteur $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{C}$.
4. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{BC}}$ (c'est-à-dire la matrice $M_B(C)$, des composantes de C dans la base B) ainsi que la matrice de passage inverse $P^{-1} = P_{\mathcal{CB}}$.
5. Vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ (donc les matrices $P_{\mathcal{CB}}$ et $P_{\mathcal{BC}}$ sont inverses l'une de l'autre) et que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exercice 15. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés :

$$(a) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y); \quad (b) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (2x - y, x + y, x - y).$$

Exercice 16. Soit V l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3. On considère l'application $T : V \rightarrow V$ définie par

$$T(P) = (-3x^3 + x^2 - x + 1)P''' + (2x^2 - 3x + 1)P'' + (4x + 3)P' - 5P$$

1. Montrer que T est une application linéaire
2. déterminer la matrice associée à T par rapport à la base canonique $(1, x, x^2, x^3)$.

Exercice 17. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, y - z, x - 2z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Écrire la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible ?

Exercices supplémentaires

Exercice 18. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Calculer A^n pour tout entier n strictement positif.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (2x - z, -x + 3y + z, z).$$

1. Calculer $f(\vec{0})$, $f(1, 1, 1)$ et $f(1, 0, -1)$.
2. Montrer que f est une application linéaire.
3. Calculer les images de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ par f où $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer que si A est inversible alors son inverse est donné par la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 21. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés :

$$(a) f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (3x + 7y, 2x - 5y); \quad (b) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, y - z).$$

Exercice 22. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. On considère les endomorphismes $\frac{d}{dX}$ et $\frac{d^2}{dX^2}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ définis par

$$\frac{d}{dX}(P) = P', \quad \frac{d^2}{dX^2}(P) = P''.$$

Calculer la matrice des endomorphismes $\frac{d}{dX}$ et $\frac{d^2}{dX^2}$ dans la base $\mathcal{B}$. Quelle relation y a-t-il entre ces deux matrices ?

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ les deux applications linéaires définies, en coordonnées cartésiennes, par

$$f(x, y) = (2x + y, -y, x - 2y), \quad g(x, y, z) = (x - z, 2y).$$

1. Calculer les applications composées $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $f \circ g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
2. Trouver les matrices A et A' qui représentent f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Vérifier que les produits $A'A$ et AA' représentent les composés $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 24. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

1. Déterminer la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer f^{-1} et en déduire A^{-1} .
3. Est-ce que l'application f est un isomorphisme ?
4. Si on considère le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^2$, est-ce que l'application f est une isométrie ?

Exercice 25. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à A (par rapport à la base canonique). Soit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donnés en composantes dans la base canonique. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 26. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) est muni de la base canonique. Écrire les matrices des applications linéaires suivantes dans la base canonique :

1. La rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$.
2. La rotation d'angle θ autour de Oz dans $\mathbb{R}^3$.
3. La réflexion par rapport à Ox dans $\mathbb{R}^2$.
4. La réflexion par rapport au plan xOy dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 27. Soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{D}$) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (resp. $\mathbb{R}^2$).

1. Soit $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ est :

$$L_{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer une base de $\text{Ker}(L)$ et de $\text{Im}(L)$.

2. Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donné par la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$:

$$L_{DB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer une base de $\text{Ker}(L)$ et de $\text{Im}(L)$.

Exercice 28. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. Donner la matrice de l'endomorphisme L de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathcal{B}$ qui est défini par : pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $L(P)(X) = P(X-1)$.

Exercice 29. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A(x) = \begin{pmatrix} \text{ch } x & \text{sh } x \\ \text{sh } x & \text{ch } x \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $A(x)$ est inversible d'inverse $A(-x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer $A(x)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 30. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on considère les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le système $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$.
3. Donner la matrice de passage inverse $P^{-1} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ et vérifier que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$.
4. Décomposer le vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 31. (*Calcul de A^n*) Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et soit $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E . Soit L l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est donnée par :

$$A = L_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\text{Ker}(L)$ et $\text{Im}(L)$, sous-espaces de E et en donner une base. Quel est le rang de L ?
2. On note $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3, \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Montrer que $B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ est une base de E . Préciser la matrice de passage $P = P_{B'B}$ de B à B' , ainsi que la matrice inverse P^{-1} .
3. Exprimer $L(\vec{e}'_1), L(\vec{e}'_2), L(\vec{e}'_3)$ dans la base B' et en déduire la matrice $D = L_{B'}$ de L dans la base B' .
4. Quelle relation lie les matrices A, D, P ?
5. Pour tout entier $n \geq 1$ exprimer la matrice A^n .

Fiche 3 - Systèmes d'équations linéaires

Exercice 32. On considère les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ y - z = 7 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

1. Déterminer l'écriture matricielle des systèmes (S_1) et (S_2) .
2. Déterminer les applications linéaires associées aux systèmes (S_1) et (S_2) .
3. Dire si (S_1) et (S_2) admettent des solutions (sans les calculer).

Exercice 33. Résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y + 4z = 2 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

Exercice 34. Résoudre, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, les systèmes :

$$(S_1) \begin{cases} x + y + z = \lambda + 1 \\ \lambda x + y + (\lambda - 1)z = \lambda \\ x + \lambda y + z = 1 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} (2 - \lambda)x + 2y = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ 2y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 35. Calculer, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, les inverses des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 36. Résoudre le système suivant par la formule de Cramer :

$$(S) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Exercice 37. Déterminer le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 + 2i \\ x_1 + (4 + i)x_2 = 3 + i \end{cases}$$

Exercices supplémentaires

Exercice 38. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \\ -3x - 4y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - z = 5 \\ -3x - 4y + 3z = 1. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13. \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x + y + z + 2t = 4 \\ x - y + z - t = 0. \end{cases}$$

Exercice 39. En utilisant la méthode de Cramer, calculer la valeur de x dans les systèmes linéaires suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 5, \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ y = 3 \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Cramer, calculer la valeur de y dans les systèmes linéaires suivants :

$$\text{c) } \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 4x + 3y = 2, \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases}$$

Exercice 40. (Suite Exercice 4) Calculer les inverses des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, & A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \\ B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, & B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \\ C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, & C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}. \\ D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, & D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 41.

1. Déterminer pour quelles valeurs de a, b réelles le système suivant a une solution unique, n'a pas de solution, ou a une infinité de solutions :

$$\begin{cases} ax + 2y + az = 1 \\ ax + (a + 4)y + 3az = -2 \\ -ax - 2y + z = 1 \\ (a + 2)y + (3a + 1)z = b \end{cases}$$

2. Pour les systèmes homogènes suivants, indiquer s'ils ont une solution unique ou s'ils en ont une infinité, et dans le dernier cas indiquer la dimension de l'espace des solutions.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5x - 2y - 2z = 0 \\ 4x + z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Exercice 42. Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fiche 4 - Réduction des endomorphismes

Exercice 43. On considère les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres des matrices A, B et C ?
2. Lesquelles de ces matrices sont diagonalisables ?

Exercice 44. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A .
2. Calculer les valeurs propres de A .
3. Déterminer une base (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A .
4. Justifier pourquoi A est diagonalisable.
5. Expliciter une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice A est représentée par une matrice diagonale D , ainsi qu'une matrice inversible P vérifiant $A = PDP^{-1}$.

Exercice 45. Soit C_{an} la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (3x + 2y - 2z, 2y, y + z).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer les valeurs propres de f .
3. Montrer que f est diagonalisable et expliciter une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D , ainsi qu'une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 46. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Expliciter en fonction de n les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + v_n \end{cases}$$

avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

Exercices supplémentaires

Exercice 47. (*Diagonalisation*) Soit Can la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit L l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base Can est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de L est une matrice diagonale D que l'on précisera.
2. Donner les équations dans la base canonique de 3 plans vectoriels stables par L .

Exercice 48. Soit E un espace vectoriel réel et L un endomorphisme de V . On suppose que L possède une valeur propre non nulle $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si L est inversible, alors λ^{-1} est valeur propre de L^{-1} .

Exercice 49. Soit A une matrice 3×3 de valeurs propres 1, 2, 3 correspondant respectivement aux vecteurs propres $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. On suppose que

$$\vec{v} = \vec{b}_1 - 4\vec{b}_2 + 3\vec{b}_3.$$

Calculer $A^5 \vec{v}$.

Exercice 50. Montrer que si A est une matrice diagonalisable, alors $\det(A)$ est égale au produit des valeurs propres de A .

Exercice 51. (*Application aux suites récurrentes*) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ formée par des vecteurs propres de A et préciser une matrice diagonale semblable à A .
2. Donner la matrice de passage P de la base canonique Can de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer P^{-1} .
3. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle déterminée par ses 2 premiers termes u_0 et u_1 et par $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

En remarquant que pour tout $n \geq 2$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$, exprimer u_n en fonction de u_0 et u_1 pour $n \geq 2$.

Exercice 52. Soit Can la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (x + 2y, 2x + y, y).$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer les valeurs propres de f .
3. Montrer que f est diagonalisable et expliciter une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D , ainsi qu'une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 53. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.
2. Montrer que si $a \neq 0$, alors A n'est pas diagonalisable.
3. On suppose $a = 0$.

- (a) Déterminer une base (ainsi que la dimension) des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A .
- (b) En déduire que A est diagonalisable.
- (c) Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
- (d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 54. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par

$$f(x, y) := (x - y, y).$$

- 1. Déterminer les matrices A et A' de f dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B} = ((1, 2), (-1, -1))$.
- 2. Vérifier que le polynôme caractéristique P_A est le même que $P_{A'}$.
- 3. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
- 4. Est-ce que f est diagonalisable ? Si oui, diagonaliser f .

Exercice 55. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par

$$f(1, 0) := (2, 0), \quad f(3, 1) = (0, 1).$$

- 1. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B} = ((1, 0), (3, 1))$.
- 2. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
- 3. Diagonaliser f .

Exercice 56. (*Systèmes différentielles*) On considère le système différentiel suivant

$$(S) \begin{cases} x'(t) = 3tx(t) + 2y(t) + e^t \\ y'(t) = 2x(t) + 3ty(t) + e^{-t} \end{cases}$$

- 1. Montrer qu'on peut écrire (S) sous la forme matricielle

$$X' = A(t)X + B(t)$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} 3t & 2 \\ 2 & 3t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

- 2. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la matrice $A(t)$ admet deux valeurs propres distinctes.
- 3. Déterminer une base de vecteurs propres de $A(t)$.
- 4. Montrer que le système différentiel (S) est équivalent au système

$$(S_1) \quad X'_1 = DX_1 + B_1(t)$$

où D est une matrice diagonale.

- 5. Résoudre le système (S_1) et en déduire les solutions de (S) .

Exercice 57. (*Systèmes différentielles*)

- 1. Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

- 2. On considère le système d'équations différentielles couplées

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -5x_1 + 4x_2, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= x_1 - 8x_2, \end{aligned}$$

- (a) Déterminer les modes normaux (c'est-à-dire les vecteurs propres de la matrice associée au système).

- (b) Résoudre le système pour la condition initiale $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ et $\frac{d}{dt}x_1(0) = \frac{d}{dt}x_2(0) = 0$.
Est-ce que la solution est périodique ? Si oui, donner sa période.

Exercice 58. (*Matrices complexes*) Diagonaliser, si c'est possible, les matrices complexes suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & i \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1+2i \end{pmatrix}.$$

Exercice 59. (*Matrices complexes*) Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix},$$

où $j = e^{2\pi i/3}$, en précisant leur ordre de multiplicité (algébrique) [Rappel : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$].

Exercice 60. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser A .
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de n .

Exercice 61. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égale à n . Soit L l'endomorphisme de E défini par $L(P)(X) = (X-1)P'(X)$. Déterminer les valeurs propres de L ainsi que les sous-espaces propres.

Exercice 62. La matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

Exercice 63. Diagonaliser la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fiche 5 - Produit scalaire, diagonalisation

Exercice 64. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soient $\vec{v} = (-3, 5, 8)$ et $\vec{w} = (1, -4, 9)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer les longueurs de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
2. Calculer l'angle non-orienté entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
3. Calculer le résultat de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la droite engendrée par $\vec{w}$.
4. Trouver une base orthonormée du plan engendré par les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
5. Trouver un vecteur orthogonal aux deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 65. Soient $\vec{v} = (1 + i, 1 - i)$ et $\vec{w} = (1 - i, 1 + i)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^2$ muni du produit scalaire canonique. Calculer le produit scalaire $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$ et les normes de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 66. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt la base constituée des vecteurs

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 67. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de F .
2. Déterminer la projection orthogonale p_F sur F .

Exercice 68. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 3, muni du produit scalaire

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux vecteurs $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2$.

Exercice 69. Montrer que l'application $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous $\vec{u} = (x_1, x_2)$, $\vec{v} = (y_1, y_2)$ par

$$B(\vec{u}, \vec{v}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$$

définie un produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 70. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice orthogonale O telle que OA^tO soit diagonale.

Exercice 71. On munit $\mathbb{C}^2$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice unitaire U telle que UAU^* soit diagonale.

Exercices supplémentaires

Exercice 72. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soit Can la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{C}an$ est une base orthonormée.
2. Montrer que la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ définie par

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right), u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

est une base orthonormée.

3. Calculer la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}an$ à la base $\mathcal{B}$.
4. Vérifier que $P \cdot {}^tP = {}^tP \cdot P = I$.

Exercice 73. Diagonaliser en base orthonormée les matrices symétriques suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 74. Soit P le plan dans $\mathbb{R}^3$ qui passe par les points $(0, 0, 0)$, $(1, 2, -1)$ et $(2, 1, 1)$. Trouver une base orthonormée $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ soit une base du plan P .

Exercice 75. Pour chacune des matrices symétriques suivantes, trouver une matrice orthogonale O telle que OA^tO soit diagonale.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 76. Calculer les valeurs propres et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 77. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

Montrer que φ est un produit scalaire.

Exercice 78.

1. Montrer que l'application $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$B(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$$

définie un produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ qui soit orthonormée par rapport à B .

2. Déterminer pour quelles valeurs réelles de a, b l'application $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante est un produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$

$$B(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1+b)x_3y_3.$$

Exercice 79.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Montrer que pour toute fonction continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\left(\int_a^b f(t) dt\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b (f(t))^2 dt.$$

Exercice 80. Soit A une matrice symétrique réelle de type $(2, 2)$. Si les valeurs propres de A sont 3, 4 et que $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à 3, trouver un vecteur propre associé à 4. Trouver A et une racine carrée de A , c'est-à-dire une matrice B telle que $B^2 = A$.

Exercice 81. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle M|N \rangle = \text{Tr}(M^t N)$$

Soit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Calculer la projection de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Exercice 82. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P|Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

et soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1.

1. Transformer la base canonique $(1, X)$ de F en une base orthonormée.
2. Déterminer $p_F(R)$ où p_F est le projecteur orthogonal sur F et $R(X) = 3X^2 - 5X$.
3. Déterminer la matrice de p_F dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 83. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice unitaire U telle que UAU^* soit diagonale.

Exercice 84. Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. On considère l'espace vectoriel E des fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 nulles sur le bord de D . Pour $f, g \in E$, on pose

$$\langle f|g \rangle = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy.$$

Montrer que c'est un produit scalaire.

Fiche 6 - Suites et séries numériques

Exercice 85. Déterminer si les suites suivantes sont convergentes ou non. Dans le cas où elles convergent donner la limite :

$$(1) \ u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}, \quad (2) \ u_n = \frac{n^2}{e^n}, \quad (3) \ u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}, \quad (4) \ u_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{3^n}\right),$$

$$(5)^* \ u_n = n\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right), \quad (6)^* \ u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \quad a, b \text{ strictement positifs.}$$

Exercice 86. À l'aide du critère de d'Alembert ou du critère de Cauchy, déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$(1) \ u_n = \frac{2^n}{n!}, \quad (2) \ u_n = \left(\pi + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (3) \ u_n = \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^n, \quad (4)^* \ u_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Exercice 87. Déterminer la nature (convergence absolue, convergence, semi-convergence, divergence et divergence grossière) des séries $\sum u_n$ de termes généraux :

$$(1) \ u_n = q^n \text{ où } q > 0, \quad (2) \ u_n = n^{\alpha+1} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3) \ u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad (4)^* \ u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

$$(5)^* \ u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}, \quad (6)^{**} \ u_n = \int_0^{1/n^2} \sin(t) \, dt, \quad (7)^{**} \ u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}, \quad (8)^{**} \ u_n = \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}.$$

Exercice 88. ** Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(n-1)}$$

est-elle convergente ? Calculer sa somme lorsque $\alpha = 1$.

Exercices supplémentaires

Exercice 89. Étudier les suites $(u_n)_n$ dont le terme général est donné par

$$(1) \ u_n = \frac{1}{2^n}, \quad (2) \ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (3) \ u_n = n^{1/n}, \quad (4) \ u_n = \frac{2^n}{n^2},$$

$$(5)^* \ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad (6)^* \ u_n = n \sin\left(\frac{2}{n}\right), \quad (7)^* \ u_n = \sqrt[n]{n+1}, \quad (8)^* \ u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pour celles qui convergent, donner la limite. Déterminer la nature des séries $\sum_n u_n$.

Exercice 90. Considérons les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}.$$

1. Montrer que (u_n) est strictement croissante et que (v_n) est strictement décroissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$.
3. Montrer que (u_n) converge vers e .
4. Montrer que (v_n) converge vers e .
5. * Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! \theta_n, 0 < \theta_n < 1 \text{ et } e = u_n + \frac{\theta_n}{n(n!)}.$$

6. ** Donner une valeur approchée par défaut de e à 10^{-4} près.
 7. ** Montrer que $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exercice 91. Étudier la nature des séries $\sum u_n$ de de termes généraux :

$$\begin{aligned} (1) \quad u_n &= \frac{1}{n(n+1)}, & (2) \quad u_n &= \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, & (3) \quad u_n &= (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right), & (4) \quad u_n &= \frac{1}{3^n \ln n}, \\ (5)^* \quad u_n &= \frac{\ln n}{n}, & (6)^* \quad u_n &= \frac{\ln n}{n2^n}, & (7)^* \quad u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}, & (8)^* \quad u_n &= (1+\sqrt{n})^{-n}, \\ (9)^* \quad u_n &= \frac{1}{4^n \ln(2+\frac{1}{n})}, & (10)^* \quad u_n &= \frac{1}{4^n \ln(1+\frac{1}{n})}. \end{aligned}$$

Exercice 92. * Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-4)^\alpha}$$

est-elle convergente ? Calculer sa somme lorsque $\alpha = 1$.

Exercice 93. * Étudier la convergence de la série numérique de terme général donné pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{\sqrt{n} + \sin(n)}{\ln(n+1) + n^3}.$$

Exercice 94. * Montrer que la série numérique suivante est convergente et calculer sa somme :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Exercice 95. ** Calculer une valeur approchée à 10^{-2} de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 96. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On considère la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^1 x^n f(x) dx$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

2. * On note $(S_n)_{n \geq 0}$ la suite des sommes partielles, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que

$$S_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} f(x) dx.$$

3. * En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente et que sa somme vaut $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx$.

4. ** Montrer, en choisissant judicieusement f , que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Exercice 97. On considère $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 2. On pose $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X(X-1)$ et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
 2. Soit $Q(X) = X^2 + X + 1$. Calculer les composantes de Q dans la base $\mathcal{B}$.
 3. * Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!}.$$

Exercice 98. * Écrire le nombre rationnel $1,037037\dots037\dots$ sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres entiers.

Exercice 99.

1. Donner la nature de la série $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})$.
2. * Simplifier la somme partielle $S_n = \sum_{k=2}^n u_k$ et en déduire la convergence de la suite

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

3. ** En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}}.$$

Exercice 100. ** En exprimant $u_n = \frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ comme somme de deux suites, déterminer selon les valeurs de α la nature de la série $\sum u_n$.

Fiche 7 - Séries entières

Exercice 101. Déterminer le rayon de convergence des séries entières à variables complexes suivantes :

$$(1) \sum \frac{z^n}{n^2}, \quad (2) \sum \frac{(-1)^n}{2^n \sqrt{n}} z^n, \quad (3) \sum \frac{z^{3n}}{2^n}, \quad (4) \sum \frac{z^{n^2}}{n}.$$

Exercice 102. Exprimer la somme de chaque série entière réelle sur son intervalle de convergence que l'on précisera :

$$(1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n, \quad (3) \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n, \quad (4) \sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1) x^{3n+2}.$$

Exercice 103. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{(n+1)^3 \ln(1 + \frac{1}{n})}, \quad n \geq 1.$$

1. Montrer que

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

2. Montrer que la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n$.

Exercice 104. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Étudier la convergence en $-R$ et en R .

Exercices supplémentaires

Exercice 105. Déterminer le rayon de convergence des séries entières à variables complexes suivantes :

$$(1) \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n, \quad (2) \sum (1 + \frac{1}{n})^{n^2} z^n, \quad (3) \sum \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n, \quad (4) \sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1},$$

$$(5) \sum (-1)^n (n+3)! z^n, \quad (6) \sum n^n z^n, \quad (7) \sum \frac{(-2)^n}{n+1} z^n, \quad (8) \sum (1+i)^n z^n.$$

Exercice 106. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$(1) \sum \frac{n^3+1}{3^n} x^n, \quad (2) \sum \frac{\ln n}{n^3} x^n, \quad (3) \sum \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n} x^n, \quad (4) \sum \sin^3(\frac{1}{n}) x^n.$$

Exercice 107. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

Exercice 108. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{pn}$.

Exercice 109. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. On suppose qu'elle diverge pour $z = 3 + 4i$ et qu'elle converge pour $z = 5i$. Quel est son rayon de convergence ?

Exercice 110. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n} x^n.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f .

Fiche 8 - Séries entières - équation différentielles

Exercice 111. Déterminer le développement en série entière en x_0 des fonctions à variable réelle suivantes (en précisant les intervalles de validité du développement) :

1. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$ en $x_0 = 0$
2. $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ en $x_0 = 0$
3. $f(x) = \sin(x)$ en $x_0 = \frac{\pi}{4}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $x_0 = 1$

Exercice 112. On considère l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0.$$

1. Calculer une solution particulière non nulle $u(x)$ de l'équation développable en série entière.
2. A l'aide du changement de fonction $y(x) = z(x)u(x)$, trouver la solution générale de l'équation sur $]0, 1[$.

Exercice 113. On considère l'équation différentielle

$$(x^2 + x)y'' + (1 + 3x)y' + y = 0$$

Déterminer une solution particulière non nulle $u(x)$ (développable en série entière) de l'équation sur l'intervalle $I =]0, 1[$, puis la solution générale de l'équation sur I de la forme $y = zu$.

Exercices supplémentaires

Exercice 114. Soit $u(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-2)}$. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? Calculer $u(x)$. (Indication : on pourra tout d'abord calculer $u'(x)$.)

Exercice 115. (*)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - xy' - y = 0$$

avec la condition initiale

$$(CE) \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et vérifiant la condition initiale (CE).

1. Calculer a_0 et a_1 .
2. Montrer que a_n vérifie la relation de récurrence

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-2}, \text{ pour tout } n \geq 2.$$

3. Déterminer l'expression de a_{2k} et montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Donner l'expression de la série entière obtenue et calculer son rayon de convergence.

Exercice 116. (**)

Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes au point indiqué en précisant le domaine de validité du développement :

1. $f(x) = e^x$ en $x_0 = 1$
2. $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ en $x_0 = 0$
3. $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ en $x_0 = 0$
4. $f(x) = \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ en $x_0 = 0$

Exercice 117. (**)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad (1+x^2)y'' - 2y = 0$$

1. On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si

$$a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2}a_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) développable en série entière au voisinage de 0 vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Calculer les coefficients et le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice 118. (***)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad xy'' + 2y' + xy = 0$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution f développable en série entière solution de (E) et vérifiant $f(0) = 1$.
2. Quel est le domaine de définition de f ? Calculer f sur ce domaine.

Exercice 119. (***)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x(1-x)y' + y = x$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$.

1. Calculer a_0, a_1, a_2 et exprimer a_n en fonction de a_{n-1} .
2. Déterminer l'expression de a_n .
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue.
4. Donner l'expression de $y(x)$ sous forme de fonctions élémentaires.

Exercice 120. (**)

Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ existe-t-il une fonction f non nulle développable en série entière au voisinage de 0 telle que $f'(x) = f(\alpha x)$? Préciser alors le rayon de convergence de la série obtenue.

Développements usuels

Fonction	Développement en série entière	Domaine de validité
e^x	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$\mathbb{R}$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$	$] -1, 1[$

$\frac{1}{1+x^2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n} x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^{2n} x^{2n} + \dots$	$] - 1, 1[$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} + \dots$	$] - 1, 1[$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} + \dots$	$] - 1, 1[$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \dots$	$] - 1, 1[$
$\arctan x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2n+1} + \dots$	$] - 1, 1[$
$\arcsin x$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \dots$	$] - 1, 1[$