Cours Mathématiques 3 (MAT2012L) L2 PCSI 2025-2026

Léon Matar Tine[1]

Automne 2025

1. Université Claude Bernard Lyon 1

Introduction

Ce cours de Mathématiques 3 est destiné aux étudiants de niveau licence 2 de la filière PCSI (Physique-Chimie et Sciences de l'ingénieur).
Trois chapitres sont développés dans ce cours

- Algèbre linéaire (Espaces vectoriels, Applications linéaires, Matrices, Déterminants, Systèmes linéaires, Réduction des endomorphismes, Espace vectoriel muni d'un produit scalaire : Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes),
- Suites et Séries numériques et de fonctions : Suites et séries numériques, Séries entières.
- Séries entières – Équations différentielles.

Les notions seront présentées dans un esprit pratique sans développement théorique.

L'UE compte pour 6 crédits. Un contrôle partiel (45% de la note) et un contrôle terminal (55% de la note) sont prévus.

Page de l'UE

https://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=a25:s3_maths3:page

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

Espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble d'éléments, appelés vecteurs, qu'on peut additionner et multiplier par des scalaires.

Pour que ceci ait un sens, l'addition et la multiplication par des scalaires doivent satisfaire certaines propriétés.

Définition 1

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne, autrement dit d'une application

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

et d'une loi de composition externe, autrement dit d'une application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{u} \end{array}$$

On dit que E, muni de ces opérations, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

(1) $(E, +)$ est un *groupe commutatif*, autrement dit :

- *commutativité* : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; (pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$) ;
- *associativité* : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$) ;
- *il existe un élément* $\vec{0}_E \in E$, appelé élément neutre, tel que $\vec{0}_E + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0}_E = \vec{u}$ (pour tout $\vec{u} \in E$) ;
- pour tout $\vec{u} \in E$, il existe $\vec{u}^* \in E$ vérifiant $\vec{u} + \vec{u}^* = \vec{0}_E$; l'élément $\vec{u}^*$ est appelé le symétrique ou l'opposé de u et est noté $-\vec{u}$.

(2) Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$;
- $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$;
- $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$;
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

$\square$

On appelle :

- Addition la loi de composition interne

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

et multiplication par des scalaires la loi de composition externe

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{u} \end{array}$$

- Vecteurs les éléments de E ;
- Scalaires les éléments de $\mathbb{K}$;
- Vecteur nul le vecteur $\vec{0}_E$.

Exemple 1

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 2

Plus généralement, sur $\mathbb{R}^n$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{R}^n$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

De même, sur $\mathbb{C}^n$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{C}^n$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exemple 3

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de l'addition des polynômes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ (P, Q) & \mapsto & P + Q \end{array} \quad \text{où } (P+Q)(X) = P(X) + Q(X)$$

et de la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ (\lambda, P) & \mapsto & \lambda P \end{array} \quad \text{où } (\lambda P)(X) = \lambda P(X).$$

Alors $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Son vecteur nul est le polynôme nul.

De même, l'ensemble $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients complexes est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Propriétés (Règles de calcul)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

- $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}_E \Leftrightarrow (\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}_E)$;
- $\lambda \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} - \lambda \cdot \vec{v}$;
- $(\lambda - \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} - \mu \cdot \vec{u}$;
- $(-\lambda) \cdot (-\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$.

Propriété Importante

$\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}_E$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $F \subseteq E$.
On peut se poser la question de savoir quand est-ce que F, quand il est muni par l'addition de E et la multiplication par des scalaires, est lui-même un espace vectoriel.

Il s'avère qu'il suffit que F soit stable par l'addition et la multiplication par les scalaires.

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

- pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in F$, $\vec{u} + \vec{v} \in F$;
- pour tout $\vec{u} \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \vec{u} \in F$.

Dans ce cas F, muni de l'addition et de la multiplication par des scalaires,

$$\begin{array}{rcl} F \times F & \to & F \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times F & \to & F \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda \vec{u} \end{array}$$

est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Abréviation

Sous-espace vectoriel= s.e.v

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si ces deux propriétés sont satisfaites

- $\vec{0} \in F$;
- pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$.

Preuve

Supposons que F soit un s.e.v de E. Alors comme F n'est pas vide, il contient un vecteur $\vec{u}$. Alors $-\vec{u} \in F$ et $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0} \in F$.
Pour la seconde propriété, soient $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda\vec{u} \in F$ et donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$.
Exercice : montrer l'implication réciproque. $\square$

Exemples immédiats : E et $\{\vec{0}\}$ sont des s.e.v de E.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite passant par l'origine est un s.e.v. En effet toute droite passant par l'origine a comme équation $ax + by = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et on vérifie aisement qu'il s'agit bien d'un s.e.v (exercice).

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^3$, tout plan passant par l'origine est un s.e.v. Un plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine est donné par une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0 \;\text{ où }\; a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Vérifions que $\mathcal{P}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathcal{P}$ passe par l'origine, on a $\vec{0} \in \mathcal{P}$. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On doit montrer que $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$. On a

$$\lambda\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix} \text{ et } ax + by + cz = 0,\; ax' + by' + cz' = 0.$$

D'où $a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') + c(\lambda z + z') = 0$. Donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$.

Exercice

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'addition et la multiplication par les scalaires par
$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \;\; (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

1. Vérifier que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   Soit $C^1(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des applications de classe C^1

   $$C^1(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ est dérivable et } f' \text{ est continue}\}.$$

2. Montrer que $C^1(\mathbb{R})$ est un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Notation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E. Alors l'intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ est définie par

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E \mid x \in F_i, \text{ pour tout } i \in I\}.$$

Par exemple, si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des sous-ensembles de E, alors leur intersection $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ est l'ensemble des éléments $x \in E$ tel que $x \in F_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E. Alors l'intersection

$$F = \bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E \mid x \in F_i, \text{ pour tout } i \in I\}$$

est un s.e.v de E.

Preuve

- (Pour tout $i \in I$, $\vec{0} \in F_i$) $\implies \vec{0} \in \bigcap_{i\in I} F_i$;
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $i \in I$, $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F_i$. Donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$. $\square$

Corollaire 1

- Si F et G sont des s.e.v, alors leur intersection $F \cap G$ est un s.e.v.
- Si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des s.e.v, alors leur intersection $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ est un s.e.v.

Exemple

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de $\mathbb{R}^3$ passants par l'origine. Alors leur intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, qui est une droite, est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3

Soient U et V deux s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E.

- On appelle somme de U et V l'ensemble défini par

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}.$$

- On dit que la somme $U + V$ est directe si $U \cap V = \{\vec{0}\}$.
- On dit du s.e.v F qu'il est la somme directe de U et V si
  - $F = U + V$;
  - $U \cap V = \{\vec{0}\}$.

  On écrit $F = U \oplus V$.

Exemple

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(U est la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$, V est la droite vectorielle dirigée par $\vec{v}$.)
Alors U et V sont des s.e.v de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$ (exercice).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de E. Alors on peut fabriquer de nouveaux vecteurs en combinant les deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Un tel nouveau vecteur est appelé une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Plus généralement ...

Définition 4

Soient $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Tout vecteur de E de la forme

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, est appelé une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^2$ le vecteur

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix}$$

est bien une combinaison linéaire des deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

car $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^3$, soient

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur quelconque $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ est une combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $A \subseteq E$. Il existe un plus petit s.e.v de E contenant A. Il est unique et on l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par A. On le note $Vect(A)$.

Preuve

E est un s.e.v de E contenant A. Donc il existe des s.e.v de E qui contiennent A. L'intersection F de ces s.e.v est un s.e.v de E contenant A. Il est le plus petit s.e.v qui contient A. En effet, si $A \subseteq H$, où H est un s.e.v de E, alors $F \subseteq H$. $\square$

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$. Alors $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A, autrement dit

$$Vect(A) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i \ \mid \ n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in A \Big\}.$$

Remarque

Donc un vecteur $\vec{u} \in E$ est dans $Vect(A)$, si et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$, il existe $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in A$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$.

Exemple

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \ \ V = \{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Alors $U = Vect(\{\vec{u}\})$ et $V = Vect(\{\vec{v}\})$.

Exercice

Montrer que $U + V = Vect(U \cup V)$.

Définition 5

Soit F un s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E et $S \subseteq E$.

- On dit que S est une partie génératrice de F si

$$F = Vect(S).$$

- On dit que S est libre, ou que les vecteurs de S sont linéairement indépendants, si

$$\text{pour tous } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \text{ pour tous } \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in S,$$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_2 \vec{u}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

- On dit que S est une base de E, si elle est génératrice et libre.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, l'espace vectoriel F engendré par les deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \;\; \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  vérifie $Vect(\vec{u}, \vec{v}) = Vect(\vec{u}, 2\vec{u}) = Vect(\vec{u})$ et donc la famille $\{\vec{u}\}$ est génératrice de F.

- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \;\; \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- $\mathbb{R}^3 = Vect(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Théorème 1

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul admet une base. Toutes les bases ont la même cardinalité : si B_1 et B_2 sont deux bases, alors il existe une bijection entre B_1 et B_2.

Définition 6

On dit d'un $\mathbb{K}$-e.v E qu'il est de dimension finie s'il admet une base finie. Le cardinal (le nombre d'éléments) d'une base est appelé la dimension de E et est noté $\dim(E)$.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^n$, considérons la famille $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ où pour $1 \leq i \leq n$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-e.v des polynômes de degré inférieur ou égal à n, la famille des polynômes

$$P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2, \ldots, P_n(X) = X^n$$

forme une base. Donc $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient L une partie libre et G une partie génératrice de E. Alors on peut compléter L par des éléments de G pour former une base de E.

Autrement dit, il existe $F \subseteq G \setminus L$ tel que $L \cup F$ soit une base de E.

Théorème de la base incomplète(version en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ une famille libre de E et soit $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \cdots, \vec{g}_m\}$ une famille génératrice de E. Alors il existe $\vec{g}_{i_1}, \cdots, \vec{g}_{i_p}$ de $\mathcal{G}$ telle que la famille $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n, \vec{g}_{i_1}, \cdots, \vec{g}_{i_p}\}$ forme une base de E.

Proposition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n. Alors :

- Toute famille libre de E a au plus n éléments.
- Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.
- Toute famille libre peut être complétée en une base de E.

Proposition 5

Soit B une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v E de dimension finie n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- B est une base de E ;
- B est une famille libre à n éléments ;
- B est une famille génératrice à n éléments.

Exemple récapitulatif sur la base incomplète

Exemple récapitulatif

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la famille $\mathcal{U}$ des deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathcal{U}$ est une famille libre. En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Alors

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{array} \right.$$

Donc $\alpha = \beta$ et $5\alpha = 0$. Par conséquent $\alpha = \beta = 0$.

Exemple récapitulatif sur la base incomplète

suite de l'exemple

On peut compléter la famille libre $\mathcal{U}$ par des éléments de *la base canonique* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ pour former une base de E.
On peut choisir par exemple $\vec{e}_1$. Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{e}_1 = \vec{0}$. On obtient $2\alpha + 3\beta + \gamma = 0$ et $\alpha = \beta$. Donc $\gamma = -5\alpha$ et $\alpha = \beta$. Par conséquent la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}$ n'est pas libre.
Choisisons $\vec{e}_2$. Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{e}_2 = \vec{0}$. On obtient $2\alpha + 3\beta = 0$, $\alpha - \beta + \gamma = 0$ et $\alpha = \beta$.
Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$, par conséquent la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est libre.
Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et comme $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est une famille libre constituée de trois vecteurs, elle forme une base.

Définition 7

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors pour tout $\vec{u} \in E$, il existe des uniques scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

qui sont appelés les composantes de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 6 (Formule de Grassmann)

Soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie. On a

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Applications linéaires

Définition 8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f : E \to F$ une application. On dit que f est linéaire si

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$;
- Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

Exemple 1

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $f : E \to E$ l'homothétie de rapport α

$$\vec{u} \mapsto f(\vec{u}) = \alpha\vec{u}.$$

Alors f est linéaire. En effet :

- $f(\vec{0}) = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha(\lambda\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \lambda\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \\ &= \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}). \end{aligned}$$

Applications linéaires : Exemples

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x-y, x+y).$$

Alors f est linéaire. En effet, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = f(\lambda x+x', \lambda y+y') = \Big((\lambda x+x')-(\lambda y+y'), (\lambda x+x')+(\lambda y+y')\Big)$$

$$(\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda y) + (x'-y', x'+y') = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}).$$

Applications linéaires : Exemples

Exemple 3

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞. L'application

$$D : E \to E, \ D(f) = f'$$

est une application linéaire. En effet :

- $D(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$D(\lambda f + g) = (\lambda f + g)'$$

$$= \lambda f' + g'$$

$$= \lambda D(f) + D(g).$$

Applications linéaires : Exemples

Exemple 4

Une rotation R d'un angle θ autour de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire. En effet, on a

$$\text{pour } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ R(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

et donc

$$R(\vec{u}+\vec{v}) = R(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (x+x')\cos\theta & -(y+y')\sin\theta \\ (x+x')\sin\theta & +(y+y')\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x\cos\theta & -y\sin\theta \\ x\sin\theta & +y\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'\cos\theta & -y'\sin\theta \\ x'\sin\theta & +y'\cos\theta \end{pmatrix} = R(\vec{u}) + R(\vec{v}).$$

De même on a $R(\lambda\vec{u}) = \lambda R(\vec{u})$.

Applications linéaires

Proposition 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. Alors l'ensemble des applications linéaires de E dans F, noté $\mathcal{L}(E, F)$, munit des opérations

$$(f, g) \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x); \ \ (\lambda, f) \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

est un $\mathbb{K}$-e.v. $\square$

Définition 9

- Une application linéaire de E dans E est appelé un endomporphisme. Le $\mathbb{K}$-e.v $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.
- Un endomorphisme bijective est appelé un automorphisme.