Cours Mathématiques 3 (MAT2012L) L2 PCSI 2025-2026

Léon Matar Tine [1]

Automne 2025

1. Université Claude Bernard Lyon 1

Introduction

Ce cours de Mathématiques 3 est destiné aux étudiants de niveau licence 2 de la filière PCSI (Physique-Chimie et Sciences de l'ingénieur).
Trois chapitres sont développés dans ce cours

- Algèbre linéaire (Espaces vectoriels, Applications linéaires, Matrices, Déterminants, Systèmes linéaires, Réduction des endomorphismes, Espace vectoriel muni d'un produit scalaire : Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes),
- Suites et Séries numériques et de fonctions : Suites et séries numériques, Séries entières.
- Séries entières – Équations différentielles.

Les notions seront présentées dans un esprit pratique sans développement théorique.

L'UE compte pour 6 crédits. Un contrôle partiel (45% de la note) et un contrôle terminal (55% de la note) sont prévus.

Page de l'UE

https://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=a25:s3_maths3:page

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

Espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble d'éléments, appelés vecteurs, qu'on peut additionner et multiplier par des scalaires.

Pour que ceci ait un sens, l'addition et la multiplication par des scalaires doivent satisfaire certaines propriétés.

Définition 1

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne, autrement dit d'une application

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

et d'une loi de composition externe, autrement dit d'une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{u} \end{array}$$

On dit que E, muni de ces opérations, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

(1) $(E,+)$ est un *groupe commutatif*, autrement dit :

- *commutativité* : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$; (pour tous $\vec{u},\vec{v}\in E$) ;
- *associativité* : $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ (pour tous $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in E$) ;
- *il existe un élément* $\vec{0}_E\in E$, appelé élément neutre, tel que $\vec{0}_E+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}_E=\vec{u}$ (pour tout $\vec{u}\in E$) ;
- pour tout $\vec{u}\in E$, il existe $\vec{u}^*\in E$ vérifiant $\vec{u}+\vec{u}^*=\vec{0}_E$; l'élément $\vec{u}^*$ est appelé le symétrique ou l'opposé de u et est noté $-\vec{u}$.

(2) Pour tous $\vec{u},\vec{v}\in E$, pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$:

- $\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\cdot\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$;
- $(\lambda+\mu)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{u}$;
- $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u})=(\lambda\mu)\cdot\vec{u}$;
- $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$.

□

On appelle :

- Addition la loi de composition interne

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

et multiplication par des scalaires la loi de composition externe

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{u} \end{array}$$

- Vecteurs les éléments de E ;
- Scalaires les éléments de $\mathbb{K}$;
- Vecteur nul le vecteur $\vec{0}_E$.

Exemple 1

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 2

Plus généralement, sur $\mathbb{R}^n$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{R}^n$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

De même, sur $\mathbb{C}^n$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{C}^n$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exemple 3

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de l'addition des polynômes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ (P, Q) & \mapsto & P + Q \end{array} \quad \text{où } (P+Q)(X) = P(X) + Q(X)$$

et de la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ (\lambda, P) & \mapsto & \lambda P \end{array} \quad \text{où } (\lambda P)(X) = \lambda P(X).$$

Alors $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Son vecteur nul est le polynôme nul.

De même, l'ensemble $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients complexes est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Propriétés (Règles de calcul)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

- $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}_E)$;
- $\lambda \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} - \lambda \cdot \vec{v}$;
- $(\lambda - \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} - \mu \cdot \vec{u}$;
- $(-\lambda) \cdot (-\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$.

Propriété Importante

$\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}_E$

Sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $F \subseteq E$.
On peut se poser la question de savoir quand est-ce que F, quand il est muni par l'addition de E et la multiplication par des scalaires, est lui-même un espace vectoriel.

Il s'avère qu'il suffit que F soit stable par l'addition et la multiplication par les scalaires.

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

- pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in F$, $\vec{u} + \vec{v} \in F$;
- pour tout $\vec{u} \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\vec{u} \in F$.

Dans ce cas F, muni de l'addition et de la multiplication par des scalaires,

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \to & F \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times F & \to & F \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda\vec{u} \end{array}$$

est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Abréviation

Sous-espace vectoriel= s.e.v

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si ces deux propriétés sont satisfaites

- $\vec{0} \in F$;
- pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$.

Preuve

Supposons que F soit un s.e.v de E. Alors comme F n'est pas vide, il contient un vecteur $\vec{u}$. Alors $-\vec{u} \in F$ et $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0} \in F$.
Pour la seconde propriété, soient $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda\vec{u} \in F$ et donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$.
Exercice : montrer l'implication réciproque. $\square$

Exemples immédiats : E et $\{\vec{0}\}$ sont des s.e.v de E.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite passant par l'origine est un s.e.v. En effet toute droite passant par l'origine a comme équation $ax + by = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et on vérifie aisement qu'il s'agit bien d'un s.e.v (exercice).

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^3$, tout plan passant par l'origine est un s.e.v. Un plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine est donné par une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0 \;\text{ où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Vérifions que $\mathcal{P}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathcal{P}$ passe par l'origine, on a $\vec{0} \in \mathcal{P}$. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On doit montrer que $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$. On a

$$\lambda\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix} \text{ et } ax + by + cz = 0,\; ax' + by' + cz' = 0.$$

D'où $a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') + c(\lambda z + z') = 0$. Donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$.

Exercice

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'addition et la multiplication par les scalaires par
$(f+g)(x) = f(x) + g(x);\ \ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

1. Vérifier que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   Soit $C^1(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des applications de classe C^1

   $$C^1(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ est dérivable et } f' \text{ est continue}\}.$$

2. Montrer que $C^1(\mathbb{R})$ est un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Notation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E. Alors l'intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ est définie par

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E \mid x \in F_i, \text{ pour tout } i \in I\}.$$

Par exemple, si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des sous-ensembles de E, alors leur intersection $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ est l'ensemble des éléments $x \in E$ tel que $x \in F_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E. Alors l'intersection

$$F = \bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E \mid x \in F_i, \text{ pour tout } i \in I\}$$

est un s.e.v de E.

Preuve

- (Pour tout $i \in I$, $\vec{0} \in F_i$) $\Longrightarrow \vec{0} \in \bigcap_{i\in I} F_i$;
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $i \in I$, $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F_i$. Donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$. $\square$

Corollaire 1

- Si F et G sont des s.e.v, alors leur intersection $F \cap G$ est un s.e.v.
- Si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des s.e.v, alors leur intersection $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ est un s.e.v.

Exemple

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de $\mathbb{R}^3$ passants par l'origine. Alors leur intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, qui est une droite, est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3

Soient U et V deux s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E.

- On appelle somme de U et V l'ensemble défini par

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}.$$

- On dit que la somme $U + V$ est directe si $U \cap V = \{\vec{0}\}$.
- On dit du s.e.v F qu'il est la somme directe de U et V si
  - $F = U + V$;
  - $U \cap V = \{\vec{0}\}$.

  On écrit $F = U \oplus V$.

Exemple

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(U est la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$, V est la droite vectorielle dirigée par $\vec{v}$.)
Alors U et V sont des s.e.v de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$ (exercice).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de E. Alors on peut fabriquer de nouveaux vecteurs en combinant les deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Un tel nouveau vecteur est appelé une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Plus généralement ...

Définition 4

Soient $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Tout vecteur de E de la forme

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, est appelé une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^2$ le vecteur

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix}$$

est bien une combinaison linéaire des deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

car $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^3$, soient

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur quelconque $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} &= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ est une combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $A \subseteq E$. Il existe un plus petit s.e.v de E contenant A. Il est unique et on l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par A. On le note $Vect(A)$.

Preuve

E est un s.e.v de E contenant A. Donc il existe des s.e.v de E qui contiennent A. L'intersection F de ces s.e.v est un s.e.v de E contenant A. Il est le plus petit s.e.v qui contient A. En effet, si $A \subseteq H$, où H est un s.e.v de E, alors $F \subseteq H$. $\square$

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$. Alors $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A, autrement dit

$$Vect(A) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i \;\mid\; n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in A \Big\}.$$

Remarque

Donc un vecteur $\vec{u} \in E$ est dans $Vect(A)$, si et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$, il existe $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in A$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$.

Exemple

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Alors $U = Vect(\{\vec{u}\})$ et $V = Vect(\{\vec{v}\})$.

Exercice

Montrer que $U + V = Vect(U \cup V)$.

Définition 5

Soit F un s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E et $S \subseteq E$.

- On dit que S est une partie génératrice de F si

$$F = Vect(S).$$

- On dit que S est libre, ou que les vecteurs de S sont linéairement indépendants, si

$$\text{pour tous } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \text{ pour tous } \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in S,$$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_2 \vec{u}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

- On dit que S est une base de E, si elle est génératrice et libre.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, l'espace vectoriel F engendré par les deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  vérifie $Vect(\vec{u}, \vec{v}) = Vect(\vec{u}, 2\vec{u}) = Vect(\vec{u})$ et donc la famille $\{\vec{u}\}$ est génératrice de F.

- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- $\mathbb{R}^3 = Vect(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Théorème 1

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul admet une base. Toutes les bases ont la même cardinalité : si B_1 et B_2 sont deux bases, alors il existe une bijection entre B_1 et B_2.

Définition 6

On dit d'un $\mathbb{K}$-e.v E qu'il est de dimension finie s'il admet une base finie. Le cardinal (le nombre d'éléments) d'une base est appelé la dimension de E et est noté $\dim(E)$.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^n$, considérons la famille $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ où pour $1 \leq i \leq n$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-e.v des polynômes de degré inférieur ou égal à n, la famille des polynômes

$$P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2, \dots, P_n(X) = X^n$$

forme une base. Donc $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient L une partie libre et G une partie génératrice de E. Alors on peut compléter L par des éléments de G pour former une base de E.

Autrement dit, il existe $F \subseteq G \setminus L$ tel que $L \cup F$ soit une base de E.

Théorème de la base incomplète(version en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ une famille libre de E et soit $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \cdots, \vec{g}_m\}$ une famille génératrice de E. Alors il existe $\vec{g}_{i_1}, \cdots, \vec{g}_{i_p}$ de $\mathcal{G}$ telle que la famille $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n, \vec{g}_{i_1}, \cdots, \vec{g}_{i_p}\}$ forme une base de E.

Proposition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n. Alors :

- Toute famille libre de E a au plus n éléments.
- Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.
- Toute famille libre peut être complétée en une base de E.

Proposition 5

Soit B une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v E de dimension finie n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- B est une base de E ;
- B est une famille libre à n éléments ;
- B est une famille génératrice à n éléments.

Exemple récapitulatif sur la base incomplète

Exemple récapitulatif

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la famille $\mathcal{U}$ des deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathcal{U}$ est une famille libre. En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Alors

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{array} \right.$$

Donc $\alpha = \beta$ et $5\alpha = 0$. Par conséquent $\alpha = \beta = 0$.

Exemple récapitulatif sur la base incomplète

suite de l'exemple

On peut compléter la famille libre $\mathcal{U}$ par des éléments de *la base canonique* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ pour former une base de E.
On peut choisir par exemple $\vec{e}_1$. Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{e}_1 = \vec{0}$. On obtient $2\alpha + 3\beta + \gamma = 0$ et $\alpha = \beta$. Donc $\gamma = -5\alpha$ et $\alpha = \beta$. Par conséquent la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}$ n'est pas libre.
Choisisons $\vec{e}_2$. Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{e}_2 = \vec{0}$. On obtient $2\alpha + 3\beta = 0$, $\alpha - \beta + \gamma = 0$ et $\alpha = \beta$. Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$, par conséquent la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est libre.
Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et comme $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est une famille libre constituée de trois vecteurs, elle forme une base.

Définition 7

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors pour tout $\vec{u} \in E$, il existe des uniques scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

qui sont appelés les composantes de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 6 (Formule de Grassmann)

Soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie. On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Applications linéaires

Définition 8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f : E \to F$ une application. On dit que f est linéaire si

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$;
- Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

Exemple 1

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $f : E \to E$ l'homothétie de rapport α

$$\vec{u} \mapsto f(\vec{u}) = \alpha \vec{u}.$$

Alors f est linéaire. En effet :

- $f(\vec{0}) = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) &= \alpha(\lambda \vec{u} + \vec{v}) \\ &= \lambda \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v} \\ &= \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}). \end{aligned}$$

Applications linéaires : Exemples

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Alors f est linéaire. En effet, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = f(\lambda x+x', \lambda y+y') = \Big((\lambda x+x')-(\lambda y+y'), (\lambda x+x')+(\lambda y+y')\Big)$$

$$(\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda y) + (x' - y', x' + y') = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}).$$

Exemple 3

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞. L'application

$$D : E \to E,\ D(f) = f'$$

est une application linéaire. En effet :

- $D(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$D(\lambda f + g) = (\lambda f + g)'$$

$$= \lambda f' + g'$$

$$= \lambda D(f) + D(g).$$

Exemple 4

Une rotation R d'un angle θ autour de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire. En effet, on a

$$\text{pour } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ R(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

et donc

$$R(\vec{u}+\vec{v}) = R(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (x+x')\cos\theta & -(y+y')\sin\theta \\ (x+x')\sin\theta & +(y+y')\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x\cos\theta & -y\sin\theta \\ x\sin\theta & +y\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'\cos\theta & -y'\sin\theta \\ x'\sin\theta & +y'\cos\theta \end{pmatrix} = R(\vec{u}) + R(\vec{v}).$$

De même on a $R(\lambda\vec{u}) = \lambda R(\vec{u})$.

Proposition 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. Alors l'ensemble des applications linéaires de E dans F, noté $\mathcal{L}(E,F)$, munit des opérations

$$(f,g) \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x); \ \ (\lambda, f) \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

est un $\mathbb{K}$-e.v. $\square$

Définition 9

- Une application linéaire de E dans E est appelé un endomporphisme. Le $\mathbb{K}$-e.v $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.
- Un endomorphisme bijective est appelé un automorphisme.

Rappel

Soit $f : E \to F$ une application.

- L'image directe par f d'une partie $A \subseteq E$ est :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

- L'image réciproque d'une partie $B \subseteq F$ est :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Proposition 8

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- Si H est un s.e.v de E, alors $f(H)$ est un s.e.v de F.
- Si G est un s.e.v de F, alors $f^{-1}(G)$ est un s.e.v de E.

Définition 10

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On appelle :

- Image de f, le s.e.v de E :

$$Im(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

- Noyau de f, le s.e.v de E :

$$Ker(f) = f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Alors f est linéaire (Exercice). On a $Ker(f) = \{\vec{0}\}$ et $Im(f) = \mathbb{R}^2$. En effet :

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$ et $x + y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Im(f) \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x - y = a$ et $x + y = b \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{b-a}{2}$.

Applications linéaires : Image et noyau

Propriété

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ une base de E. Alors $Im(f) = Vect(f(\vec{u}_1), \cdots, f(\vec{u}_n))$.

Proposition 10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est injective ;
- $Ker(f) = \{\vec{0}\}$;
- Pour tout $\vec{u} \in E$, $f(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est surjective ;
- Im(f)=F.

Définition 11

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La dimension de Im(f) est appelée le rang de f et est notée $rg(f)$.

Théorème (Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\dim(E) = rg(f) + dim(Kerf(f)).$$

Applications linéaires : Rappel terminologie

Terminologie à retenir

- Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme. Le $\mathbb{K}$-e.v $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.
- Un endomorphisme bijectif est appelé un automorphisme.

Matrices

Définition

On appelle matrice tout tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} sont des scalaires (des éléments de $\mathbb{K}$).

- On note
$$M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m},$$
a_{ij} est le coefficient : intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.
- M est dite de taille $n \times m$ (elle a n lignes et m colonnes).

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 25 & 1+i \\ 21 & 11 \end{pmatrix} ;\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ (mais dans $\mathbb{C}$ aussi) ; B est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Les matrices

Définition

On dit que M est une matrice

- colonne si elle a une seule colonne ($m = 1$).
- ligne si elle a une seule ligne ($n = 1$).
- carrée si elle a le même nombre de lignes que de colonnes ($n = m$).

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} i & 3 & 5 \end{pmatrix} ; \; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice carrée
B est une matrice ligne
C est une matrice colonne

Remarques & notations

- Une matrice à n lignes et m colonnes est aussi appelée matrice de type (n, m) ou encore matrice $n \times m$.
- On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times m$.
- On note $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$.

Remarques & notations

- La matrice identité $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice carrée dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et les autres coefficients valent 0.
  Exemple :
$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- La matrice nulle $O_{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.
  Exemple :
$$O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Définition 6 (Somme de deux matrices)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

On définit la somme $A + B$, une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Remarque

On ne somme que des matrices de même taille.

Définition (Multiplication par un scalaire)

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq m}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

On définit la matrice λA, une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq m}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} ; \; \pi B = \begin{pmatrix} 5\pi & 6\pi \\ 7\pi & 8\pi \end{pmatrix}$$

Proposition 4

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ muni de l'addition des matrices $(A, B) \mapsto A + B$ et de la multiplication par des scalaires $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \times m$.
Le vecteur nul de cet espace est la matrice nulle $O_{n,m}$.

Exemple & exercice

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ on considère la famille $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Définition (Produit de deux matrices)

Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq m}$ une matrice $p \times m$.

Le produit de A et B est la matrice $n \times m$, notée $A \cdot B$, dont les coefficients c_{ij} sont définis par : c_{ij} est le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6) = (32).$$

Exemple

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 2 \\ 3 \times 0 + 4 \times 1 & 3 \times 2 + 4 \times 2 \\ 5 \times 0 + 6 \times 1 & 5 \times 2 + 6 \times 2 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 14 \\ 6 & 22 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarques

(1) Pour que le produit de A par B ait un sens if faut que le nombre de colonnes de A soit le même que le nombre de lignes de B.
(2) Le produit d'une matrice de type (n, p) par une matrice de type (p, m) est une matrice de type (n, m).

Remarques

(1) On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve qu'en général $A \cdot B \neq B \cdot A$ et $A \cdot B = O$ n'implique pas forcément $A = O$ ou $B = O$ (O désigne la matrice nulle).

(2) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a (exercice)

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Propriétés

Les propriétés suivantes sont vraies sous hypothèse que les produits considérés ont un sens :

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
- $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$.

Notations & conventions

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A^0 = I_n, \;\; A^1 = A, \;\; A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ fois}}.$$

Remarque

On a

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

et si $AB \neq BA$ alors

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

Proposition 5 (Formule du binôme pour les matrices)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = BA$.
Alors pour tout $n \geq 0$ on a

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

où $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial : $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Matrice de passage

Matrice de passage

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et soit $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E. Soit $\vec{u} \in E$ ayant comme composantes dans la base $\mathcal{B}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
(Donc $\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n$).
On appelle matrice des composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

On écrit

$$M_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ ou } \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Matrice de passage

Définition (suite)

Plus généralement, soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle matrice des composantes de la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice $n \times m$ dont les colonnes sont $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1), \ldots, M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_m)$.
Elle est notée $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)$.

Exemple

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$M_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Matrice de passage

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n. Soient $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ deux bases de E.

On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$, la matrice carrée $n \times n$, $M_{\mathcal{B}_1}(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$.
Elle est notée $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$.

Donc c'est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des composantes de $\vec{f}_j$ dans la base $\mathcal{B}_1$.
C'est donc la matrice carrée $n \times n$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\vec{f}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ considérons les deux bases $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$ où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons la matrice $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$. Les composantes de $\vec{w}$ et $\vec{r}$ dans $\mathcal{B}_1$ sont (exercice)

$$\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\,; \ \vec{r} = -\vec{u} + \vec{v}.$$

Donc

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ M_{\mathcal{B}_1}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice de passage

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors pour tout $\vec{u} \in E$

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{u}) = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} \cdot M_{\mathcal{B}_2}(\vec{u}).$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent : $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v}),\ \mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On avait trouvé

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{f} = \vec{w} + \vec{r}$ et calculons ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1$. On a

$$M_{\mathcal{B}_2}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ M_{\mathcal{B}_1}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-e.v munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

On appelle matrice de f, par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la matrice

$$M_{\mathcal{C}}(f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)).$$

Elle est notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Exemple

On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique, notée ici $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ et $\mathbb{R}^2$ de la base canonique, notée ici $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y).$$

On a

$$f(\vec{u}_1) = (1, 1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \; f(\vec{u}_2) = (2, -1) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2,$$
$$f(\vec{u}_3) = (-1, 0) = -\vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2.$$

Donc

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Proposition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-e.v (de dimension finie) munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors pour tout $\vec{u} \in E$

$$M_{\mathcal{C}}(f(\vec{u})) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}(\vec{u}).$$

Remarque

Autrement dit, si Y désigne la matrice colonne des composantes de $f(\vec{u})$ dans la base $\mathcal{C}$ et X désigne la matrice colonne des composantes de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$Y = AX, \quad \text{où } A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, par rapport aux bases canoniques,

$$f(x,y,z) = (x+2y-z, x-y),\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{pmatrix} x+2y-z \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension respectives n et m. Soient $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m)$ une base de F.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. L'application linéaire associée à A, relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, est l'application définie par : au vecteur $\vec{u} \in E$ de composantes $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, elle associé le vecteur $\vec{v}$ dont les composantes $(y_1, \cdots, y_m)$ dans la base $\mathcal{C}$ sont données par

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

Autrement dit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Exemple

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire associée à A, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est

$$f(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Théorème

Soit E (respectivement F) un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n (respectivement m), muni d'une base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{C}$). L'application

$$\mathcal{M} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K});\ f \mapsto \mathcal{M}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v.

Remarque

Donc fondamentalement en dimension finie, une fois que les bases sont fixées, il n'existe pas de différence réelle entre applications linéaires et matrices.

Proposition

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, munis respectivement des bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Matrices inversibles

Matrices inversibles

Définition

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.
Cette matrice est alors unique, est appelée l'inverse de A et est notée A^{-1}.

Exemple

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

et donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matrices inversibles

Proposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A et B sont inversibles, il en de même de $A \cdot B$ et on a

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Matrices inversibles et bases

Matrices inversibles et bases

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$.

Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une base de E si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est inversible.

Exemple

Soit $Can = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Considérons la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où

$$\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \;\; \vec{v} = \vec{e}_2, \;\; \vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

La famille $\mathcal{B}$ est libre car la matrice

$$M_{Can}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible (exercice).

Matrices inversibles et matrices de passage

Proposition

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$; autrement dit

$$P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}.$$

Matrices inversibles et matrices de passage

Exemple

Considérons les deux bases $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$ de $\mathbb{R}^2$ où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà calculé :

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ M_{\mathcal{B}_1}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ est inversible et

$$P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matrices inversibles et applications linéaires

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, $\mathcal{B}_1$ une base de E et $\mathcal{B}_2$ une base de F.

Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective si et seulement si $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ est inversible.

On a alors

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)^{-1} = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f^{-1}).$$

Matrices inversibles et applications linéaires

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$.
Sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$f(x, y) = (a, b) \text{ si et seulement si } x = \frac{a+b}{2},\ y = \frac{b-a}{2}$$

et donc $f^{-1}(a, b) = (\frac{a+b}{2},\ \frac{b-a}{2})$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Matrices inversibles et applications linéaires

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. Alors

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) \cdot P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}.$$

Déterminants

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors le déterminant de A est la quantité

$$ad - bc.$$

On note

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \times 2 - 1 \times 5 = 11.$$

Déterminants

Proposition & Définition

Supposons avoir défini le déterminants des matrices carrées $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ avec $m \leq n-1$. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit Δ_{ij} le déterminant de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Alors :

- (Développement suivant une colonne) : pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a
$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$
- (Développement suivant une ligne) : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a
$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Développement suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Développement suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemple

En développant suivant la première colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 30 + 0 = -33.$$

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de n vecteurs de E. On définit

$$det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = det(M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)).$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E.

Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une base de E.
- $det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \neq 0$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ considérons

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

et donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$. On a alors

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

Quelques propriétés des déterminants

- Un déterminant qui a deux colonnes (resp. deux lignes) identiques est nul.
- La permutation de deux colonnes (resp. de deux lignes) multiplie le déterminant par -1.
- Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes) est nul.
- Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est formée de 0 est nul.
- La valeur d'un déterminant est inchangé si l'on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes).
- Si l'on multiplie une colonne (resp. une ligne) d'un déterminant par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ.

Systèmes d'équations linéaires

Les systèmes linéaires interviennent dans diverses branches des mathématiques, ainsi que dans la résolution de nombreux problèmes issus des autres domaines, comme la physique, la mécanique, l'économie, le traitement du signal, ...

Ils peuvent être considérés comme la "base calculatoire" de l'algèbre linéaire. Ils sont au coeur du traitement d'une grande partie des problèmes issus de l'algèbre linéaire en dimension finie. Par exemple, ils permettent de déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire, de déterminer si une famille de vecteurs est libre ou non, ...

Exemples de la géométrie euclidienne

- Dans le plan (Oxy), l'équation d'une droite s'écrit

$$ax + by = c,$$

  où a, b et c sont des réels.

- Considérons deux droites : $\mathcal{D}_1$ d'équation $ax + by = c$ et $\mathcal{D}_2$ d'équation $dx + ey = f$. Alors un point (x, y) appartient à l'intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, si et seulement si, il est solution du système linéaire :

$$(S) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

  Remarquons que trois cas se présentent :
  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ s'intersectent en un seul point : (S) a une unique solution
  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles : (S) n'a pas de solution
  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues : (S) a une infinité de solutions.

Dans l'espace $(Oxyz)$, l'intersection de deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est l'ensemble des solutions du système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{c} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{array} \right.$$

Trois cas se présentent :

- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ s'intersectent en une droite : (S) a une infinité de solutions
- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles : (S) n'a pas de solution
- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont confondues : (S) a une infinité de solutions.

Systèmes d'équations linéaires

On appelle système linéaire de n équations et à m inconnues $x_1, \dots, x_m$, tout système de la forme

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{im}x_m & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \right.$$

où $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ et $b_1, \dots, b_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

- Les nombres a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, sont les coefficients du système (S).
- Le n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$ est le second membre du système (S).

Exemples

(1) Pour $n = 1$, on obtient une équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b.$$

(2) Équation d'une droite dans le plan : $ax + by = c$.
(3) Systèmes à 2 équations et 2 inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 9x + 6y = 3 \end{cases}$$

(4) Le système

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_1 = 1 \end{cases}$$

a comme second membre $(1, 1, 1)$.

(1) La matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ est appelée la matrice du système (S). Elle sera notée A_S.

(2) Si le second membre du système est nul, autrement dit $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, on dit que le système (S) est homogène.

Systèmes d'équations linéaires

Exemples

(1) Soit (S) le système

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 = 10 \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(6, 10)$.
(2) Le système

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

est homogène.

Écriture matricielle

Soit (S) un système linéaire

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = b_i, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n, \end{array} \right.$$

$A = A_S = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ sa matrice et $(b_1, \ldots, b_n)$ son second membre. En posant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

on peut écrire le système (S) sous la forme matricielle

$$A \cdot X = B.$$

Exemple

Soit (S) le système (S) $\left\{\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 = 10. \end{array}\right.$
Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(6, 10)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Considérons le système (S) $\begin{cases} 2x + 7y + 5z = 1, \\ 3x + 2y - 6z = 11, \\ x - y + 9z = 0. \end{cases}$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 11, 0)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Considérons le système (S) $\begin{cases} 2x + 9y = 1, \\ 3x - 2y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 3, 1)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Systèmes d'équations linéaires : Interprétation à l'aide d'une application linéaire

Soient $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ munis respectivement des bases canoniques.

Soit (S) un système linéaire de n équations et m inconnues de matrice A.

Alors on peut associer canoniquement une application linéaire f à (S) définie sur $\mathbb{K}^m$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$: c'est l'application linéaire associée à A (relativement aux bases canoniques)

$$f(x_1, \ldots, x_m) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

En posant $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, (S) est équivalent à

$$f(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Systèmes d'équations linéaires : Ensemble des solutions

Définition

Soit (S) un système linéaire de n équations et à m inconnues.

- Une solution de (S) est un m-uplet $(s_1, \ldots, s_m)$ tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, $\cdots$, s_n pour x_n, dans (S) on obtient une égalité.
- L'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble de toutes les solutions de (S).
- On dit que (S) est compatible si (S) admet des solutions.

Systèmes d'équations linéaires : Ensemble des solutions

Proposition

Soit (S) un système linéaire homogène de n équations à m inconnues. L'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$.

Preuve

En utilisant l'application linéaire f associée à (S), on a

$$(s_1, \ldots, s_m) \text{ est une solution de } (S) \text{ si et seulement si } f(s_1, \ldots, s_m) = \vec{0}$$

$$\text{si et seulement si } (s_1, \ldots, s_m) \in Ker(f).$$

Donc l'ensemble des solutions de (S) est le noyau de f. Comme ce dernier est un $\mathbb{K}$-e.v., il en est de même de l'ensemble des solutions de (S). $\square$

Proposition

Soit (S) un système linéaire de n équations à m inconnues. Si $\vec{s}$ est une solution particulière de (S), alors l'ensemble des solutions de (S) est

$$\vec{s} + Ker(f) = \{\vec{s} + \vec{h} \mid \vec{h} \in Ker(f)\},$$

où f est l'application linéaire associée à (S).

Preuve

Soit $\vec{x}$ une solution de (S). Alors $f(\vec{x}) = \vec{b}$, où $\vec{b}$ est le vecteur représenté par le second membre de (S). On a $f(\vec{x} - \vec{s}) = f(\vec{x}) - f(\vec{s}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$ et donc $\vec{x} - \vec{s} \in Ker(f)$. D'où $\vec{x} = \vec{s} + (\vec{x} - \vec{s}) \in \vec{s} + Ker(f)$. Inversement, si $\vec{x} = \vec{s} + \vec{h}$, avec $\vec{h} \in Ker(f)$, alors $f(\vec{x}) = f(\vec{s} + \vec{h}) = \vec{b} + f(\vec{h}) = \vec{b}$ et donc $\vec{x}$ est solution de (S). $\square$

Proposition

Tout système d'équations linéaires possède ou bien aucune solution, ou bien une seule solution, ou bien une infinité de solutions.

Preuve

Soit $f(\vec{x}) = \vec{b}$ l'interprétation à l'aide d'une application linéaire de (S). Un des cas suivants se présentent :

- $\vec{b} \notin Im(f)$: (S) n'a pas de solutions
- $\vec{b} \in Im(f)$ et $Kerf(f) = \{\vec{0}\}$: (S) a une unique solution
- $\vec{b} \in Im(f)$ et $Kerf(f) \neq \{\vec{0}\}$: (S) a une infinité de solutions

□

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle rang de la matrice A la dimension du sous-espace vectoriel (de $\mathbb{K}^m$) engendré par ses vecteurs colonnes.

Propriété

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est égal au rang de l'application linéaire qui lui est associée. En effet, si f est l'application linéaire associée à A

$$rg(f) = \dim(Im(f)) = \dim(Vect(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_m)))$$

or on vérifie que

$$f(\vec{e}_i) = A \cdot \vec{e}_i = \text{ la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

Définition

- Soit A une matrice de type (m, n). On appelle matrice extraite de A, toute matrice obtenue en supprimant un certain nombre de lignes et un certain nombre de colonnes de A.
- On appelle déterminant extrait de A, tout déterminant d'une matrice carrée extraite de A.

Théorème (Calcul pratique du rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors le rang de A est le plus grand entier r tel que l'on puisse extraire de A au moins une matrice carrée inversible de type (r, r). □

Exemples

(1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est
$det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Donc on peut extraire une matrice d'ordre 3 inversible ; d'où $rg(A) = 3$.

(2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est
$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Donc on ne peut pas extraire une matrice d'ordre 3 inversible. Par contre la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ extraite de A possède un déterminant non nul ; d'où $rg(A) = 2$.

Définition

Soit (S) un système de n équations à m inconnues de matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$ et de second membre $\vec{b}$.

- Le rang de (S) est par définition le rang de sa matrice :

$$rg(S) = rg(A).$$

- La matrice augmentée de (S) est la matrice, notée $[A|\vec{b}]$, définie par :

$$[A|\vec{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Remarque

Pour bien distinguer le second membre $\vec{b}$ de A et pour des raisons pratiques de calculs, on écrit $[A|\vec{b}]$ sous la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Exemple

Considérons le système (S) $\begin{cases} 2x+7y+5z=1, \\ 3x+2y-6z=11, \\ x-y+9z=0. \end{cases}$

Alors la matrice du système (S) est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 11, 0)$. Donc $[A|\vec{b}]$ est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -6 & 11 \\ 1 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

Proposition (CNS pour l'existence des solutions)

Soit (S) un système d'équations linéaires, de matrice A et de second membre $\vec{b}$. Alors (S) est compatible, si et seulement si, $rg(A) = rg([A|\vec{b}])$.

Exemple

Soit (S) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2y+3z=0 \\ 3y+2z=1 \end{array}\right.$ Alors la matrice du système est

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est

$det(A) = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Donc on peut extraire une matrice d'ordre 3 inversible ; d'où $rg(A) = 3$. La matrice augmentée de (S) est

$[A|\vec{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$. Son rang ne peut être 4 et comme A est une matrice extraite de rang 3 ; $\mathrm{rg}([A|\vec{b}]) = 3$. Donc (S) est compatible (admet des solutions).

Méthode du pivot de Gauss

Systèmes d'équations linéaires : Méthode du pivot de Gauss

La méthode de pivot de Gauss consiste à transformer un système, en utilisant des "opérations élémentaires", à un système échelonné réduit. Il se trouve que les systèmes échelonnés réduits sont plus faciles à résoudre.

Systèmes d'équations linéaires : Méthode du pivot de Gauss

Définition 9

Les opérations suivantes sur les équations d'un système linéaire (ou sur les lignes de sa matrice) sont appelées des opérations élémentaires :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$: multiplier l'équation L_i par le scalaire non nul λ.
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $i \neq j$: rajouter à l'équation L_i, l'équation L_j multipliée par le scalaire λ.
- $L_i \leftrightarrow L_j$: permuter les deux équations L_i et L_j.

Propriété

Les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions d'un système. Ils transforment un système linéaire en un autre système ayant le même ensemble de solutions.

Étape 1 : échelonnement

- Il faut d'abord que le premier coefficient de la première ligne soit non nul. Si ce n'est pas le cas, on permute la ligne L_1 par la première ligne dont le premier coefficient est non nul : $L_1 \leftrightarrow L_j$.
- Si le premier coefficient de la première ligne est différent de 1, on multiplie L_1 par $1/a_{11}$: $L_1 \leftarrow 1/a_{11}L_1$. Nous avons un pivot en position $(1, 1)$.
- Le pivot sert à éliminer tous les autres termes sur la même colonne : pour $2 \leq i \leq n$, on remplace l'équation L_i par $L_i - a_{i1}L_1$, on élimine ainsi x_1 dans l'équation L_i.

On obtient un système avec une équation L_1 contenant x_1 et les autres équations ne contenant pas de x_1 :

$$(S') \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \cdots & + & a'_{1m}x_m & = & b'_1 \\ 0 & + & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{im}x_m & = & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & + & a'_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n \end{array} \right.$$

On aboutit ainsi à un nouveau système, on recommence les étapes ci-dessus pour éliminer x_2 :

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{im}x_m & = & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n \end{array} \right.$$

Exemple

Soit

$$(S)\ \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + 3z = 4 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

On effectue les opérations élémentaires directement sur la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2 L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2} L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{9} L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée.

Étape 2 : réduction

En partant de la dernière ligne et en utilisant le premier coefficient non nul comme pivot, on applique la même méthode que celle de l'étape d'échelonnement, en allant du bas à droite vers le haut à gauche.

Exemple

Continuons l'exemple précédent avec la matrice échelonnée obtenue.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite.

Étape 3 : resolution
Maintenant le système est échelonné et réduit, sa résolution est plus simple.

Exemple

Continuons l'exemple précédent avec la matrice échelonnée réduite obtenue.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

Le système devient

$$\left\{ \begin{array}{c} x = -5/9 \\ y = 8/9 \\ z = 11/9 \end{array} \right.$$

et la solution, dans ce cas, est évidente.

Exemple 2
Considérons le système

$$(S)\ \begin{cases} -y+2z+13t=5 \\ x-2y+3z+17t=4 \\ -x+3y-3z-20t=-1 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right)$$

Exemple 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Systèmes d'équations linéaires : Méthode du pivot de Gauss

Exemple 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée.

Exemple 2

Pour réaliser la réduction, on remonte à partir de la dernière ligne en utilisant le premier coefficient non nul comme pivot.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite.

Exemple 2

Le système (S) est maintenant équivalent à

$$\begin{cases} x - 4t = -2 \\ y - 3t = 3 \\ z + 5t = 4 \end{cases}$$

où x, y, z sont les variables principales et t est la variable secondaire (ou paramètre). L'ensemble des solutions est

$$\Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2 + 4\lambda, y = 3 + 3\lambda, z = 4 - 5\lambda, t = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}\Big\}$$

$$= (-2, 3, 4, 0) + Vect\Big((4, 3, -5, 1)\Big).$$