

# Cours Mathématiques 3 (MAT2012L) L2 PCSI 2026-2027

Léon Matar Tine<sup>1</sup>

Automne 2026

## 1 Introduction générale sur le cours

## 2 Espaces vectoriels

- Définition, propriétés
- Sous-espaces vectoriels
- Familles génératrices, familles libres, bases
- Applications linéaires
  - Définitions, propriétés
  - Image et noyau
- Les matrices
  - Opérations sur les matrices

# Introduction

Ce cours de Mathématiques 3 est destiné aux étudiants de niveau licence 2 de la filière PCSI (Physique-Chimie et Sciences de l'ingénieur).

Trois chapitres sont développés dans ce cours

- Algèbre linéaire (Espaces vectoriels, Applications linéaires, Matrices, Déterminants, Systèmes linéaires, Réduction des endomorphismes, Espace vectoriel muni d'un produit scalaire : Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes),
- Suites et Séries numériques et de fonctions : Suites et séries numériques, Séries entières.
- Séries entières – Équations différentielles.

Les notions seront présentées dans un esprit pratique sans développement théorique.

L'UE compte pour 6 crédits. Un contrôle partiel (45% de la note) et un contrôle terminal (55% de la note) sont prévus.

[https://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=a25:s3\\_maths3:page](https://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=a25:s3_maths3:page)

Dans la suite,  $\mathbb{K}$  désigne le corps des **nombre réels** ou le corps des **nombre complexes**. Les éléments de  $\mathbb{K}$  sont appelés des **scalaires**.

## Espace vectoriel

Un **espace vectoriel** est un ensemble d'éléments, appelés **vecteurs**, qu'on peut **additionner** et **multiplier par des scalaires**.

Pour que ceci ait un sens, l'addition et la multiplication par des scalaires doivent satisfaire certaines propriétés.

## Définition 1

Soit  $E$  un ensemble non vide muni d'une **loi de composition interne**, autrement dit d'une application

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow E \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

et d'une **loi de composition externe**, autrement dit d'une application

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, \vec{u}) &\mapsto \lambda \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

On dit que  $E$ , muni de ces opérations, est un  **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** si :

(1)  $(E, +)$  est un *groupe commutatif*, autrement dit :

- *commutativité* :  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$  ; (pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in E$ ) ;
- *associativité* :  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$  (pour tous  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$ ) ;
- *il existe un élément*  $\vec{0}_E \in E$ , appelé **élément neutre**, tel que  $\vec{0}_E + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0}_E = \vec{u}$  (pour tout  $\vec{u} \in E$ ) ;
- pour tout  $\vec{u} \in E$ , il existe  $\vec{u}^* \in E$  vérifiant  $\vec{u} + \vec{u}^* = \vec{0}_E$  ; l'élément  $\vec{u}^*$  est appelé le **symétrique** ou **l'opposé** de  $u$  et est noté  $-\vec{u}$ .

(2) Pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in E$ , pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  :

- $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$  ;
- $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$  ;
- $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$  ;
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ .



On appelle :

- **Addition** la loi de composition interne

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & E \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

et **multiplication par des scalaires** la loi de composition externe

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{u} \end{array}$$

- **Vecteurs** les éléments de  $E$  ;
- **Scalars** les éléments de  $\mathbb{K}$  ;
- **Vecteur nul** le vecteur  $\vec{0}_E$ .

## Exemple 1

Sur  $\mathbb{R}^2$ , on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires  $\lambda \in \mathbb{R}$  par

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Alors  $\mathbb{R}^2$ , muni de ces deux opérations, est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

## Exemple 2

Plus généralement, sur  $\mathbb{R}^n$ , on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires  $\lambda \in \mathbb{R}$  par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors  $\mathbb{R}^n$ , muni de ces deux opérations, est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

De même, sur  $\mathbb{C}^n$ , on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires  $\lambda \in \mathbb{C}$  par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors  $\mathbb{C}^n$ , muni de ces deux opérations, est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

### Exemple 3

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  à coefficients réels. On munit  $\mathbb{R}_n[X]$  de l'addition des polynômes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ (P, Q) & \mapsto & P + Q \end{array} \quad \text{où } (P + Q)(X) = P(X) + Q(X)$$

et de la multiplication par des scalaires  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ (\lambda, P) & \mapsto & \lambda P \end{array} \quad \text{où } (\lambda P)(X) = \lambda P(X).$$

Alors  $\mathbb{R}_n[X]$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Son vecteur nul est le polynôme nul.

De même, l'ensemble  $\mathbb{C}_n[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  à coefficients complexes est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

## Propriétés (Règles de calcul)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in E$  et pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , on a :

- $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}_E)$  ;
- $\lambda \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} - \lambda \cdot \vec{v}$  ;
- $(\lambda - \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} - \mu \cdot \vec{u}$  ;
- $(-\lambda) \cdot (-\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$ .

## Propriété Importante

$\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}_E$  si et seulement si  $\lambda = 0$  ou  $\vec{u} = \vec{0}_E$

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $F \subseteq E$ .

On peut se poser la question de savoir quand est-ce que  $F$ , quand il est muni par l'addition de  $E$  et la multiplication par des scalaires, est lui-même un espace vectoriel.

Il s'avère qu'il suffit que  $F$  soit stable par l'addition et la multiplication par les scalaires.

## Définition 2

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-ensemble non vide de  $E$ . On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  si

- pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in F$ ,  $\vec{u} + \vec{v} \in F$  ;
- pour tout  $\vec{u} \in F$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \vec{u} \in F$ .

Dans ce cas  $F$ , muni de l'addition et de la multiplication par des scalaires,

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \rightarrow & F \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times F & \rightarrow & F \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda \vec{u} \end{array}$$

est lui-même un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## Abréviation

Sous-espace vectoriel = s.e.v

## Proposition 1

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . Alors  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  si et seulement si ces deux propriétés sont satisfaites

- $\vec{0} \in F$  ;
- pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in F$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$ .

## Preuve

Supposons que  $F$  soit un s.e.v de  $E$ . Alors comme  $F$  n'est pas vide, il contient un vecteur  $\vec{u}$ . Alors  $-\vec{u} \in F$  et  $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0} \in F$ .

Pour la seconde propriété, soient  $\vec{u}, \vec{v} \in F$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors  $\lambda\vec{u} \in F$  et donc  $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$ .

Exercice : montrer l'implication réciproque. □

Exemples immédiats :  $E$  et  $\{\vec{0}\}$  sont des s.e.v de  $E$ .

## Exemple 1

Dans  $\mathbb{R}^2$ , toute droite passant par l'origine est un s.e.v. En effet toute droite passant par l'origine a comme équation  $ax + by = 0$  où  $a, b \in \mathbb{R}$  et on vérifie aisément qu'il s'agit bien d'un s.e.v (exercice).

## Exemple 2

Dans  $\mathbb{R}^3$ , tout plan passant par l'origine est un s.e.v. Un plan  $\mathcal{P}$  passant par l'origine est donné par une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0 \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Vérifions que  $\mathcal{P}$  est un s.e.v de  $\mathbb{R}^3$ . Comme  $\mathcal{P}$  passe par l'origine, on a

$\vec{0} \in \mathcal{P}$ . Soient  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ ,  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On doit

montrer que  $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$ . On a

$$\lambda\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix} \quad \text{et } ax + by + cz = 0, \quad ax' + by' + cz' = 0.$$

D'où  $a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') + c(\lambda z + z') = 0$ . Donc  $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$ .

## Exercice

Soit  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  l'ensemble des applications de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On définit l'addition et la multiplication par les scalaires par  
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ;  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ .

- 1 Vérifier que  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit  $C^1(\mathbb{R})$  le sous-ensemble de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  des applications de classe  $C^1$

$$C^1(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ est dérivable et } f' \text{ est continue}\}.$$

- 2 Montrer que  $C^1(\mathbb{R})$  est un s.e.v de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

## Notation

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de s.e.v de  $E$ . Alors l'intersection  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est définie par

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \{x \in E \mid x \in F_i, \text{ pour tout } i \in I\}.$$

Par exemple, si  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sont des sous-ensembles de  $E$ , alors leur intersection  $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$  est l'ensemble des éléments  $x \in E$  tel que  $x \in F_k$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

## Proposition 2

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de s.e.v de  $E$ . Alors l'intersection

$$F = \bigcap_{i \in I} F_i = \{x \in E \mid x \in F_i, \text{ pour tout } i \in I\}$$

est un s.e.v de  $E$ .

## Preuve

- (Pour tout  $i \in I$ ,  $\vec{0} \in F_i$ )  $\implies \vec{0} \in \bigcap_{i \in I} F_i$ ;
- Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in F$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors pour tout  $i \in I$ ,  $\lambda \vec{u} + \vec{v} \in F_i$ . Donc  $\lambda \vec{u} + \vec{v} \in F$ . □

## Corollaire 1

- Si  $F$  et  $G$  sont des s.e.v, alors leur intersection  $F \cap G$  est un s.e.v.
- Si  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sont des s.e.v, alors leur intersection  $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$  est un s.e.v.

### Exemple

Soient  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  deux plans de  $\mathbb{R}^3$  passants par l'origine. Alors leur intersection  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ , qui est une droite, est un s.e.v de  $\mathbb{R}^3$ .

## Définition 3

Soient  $U$  et  $V$  deux s.e.v du  $\mathbb{K}$ -e.v  $E$ .

- On appelle **somme** de  $U$  et  $V$  l'ensemble défini par

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}.$$

- On dit que la somme  $U + V$  est **directe** si  $U \cap V = \{\vec{0}\}$ .
- On dit du s.e.v  $F$  qu'il est la **somme directe** de  $U$  et  $V$  si
  - $F = U + V$ ;
  - $U \cap V = \{\vec{0}\}$ .

On écrit  **$F = U \oplus V$** .

## Exemple

Considérons dans  $\mathbb{R}^2$  deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

( $U$  est la droite vectorielle dirigée par  $\vec{u}$ ,  $V$  est la droite vectorielle dirigée par  $\vec{v}$ .)

Alors  $U$  et  $V$  sont des s.e.v de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$  (exercice).

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs de  $E$ . Alors on peut fabriquer de nouveaux vecteurs en combinant les deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .

Un tel nouveau vecteur est appelé une **combinaison linéaire** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Plus généralement ...

#### Définition 4

Soient  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$  des vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Tout vecteur de  $E$  de la forme

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$$

où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , est appelé une **combinaison linéaire** des vecteurs  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ .

## Exemple 1

Dans  $\mathbb{R}^2$  le vecteur

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix}$$

est bien une combinaison linéaire des deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

car  $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$ .

## Exemple 2

Dans  $\mathbb{R}^3$ , soient

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur quelconque  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^3$  s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Donc  $\vec{u}$  est une combinaison linéaire de  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

## Proposition 2

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v et  $A \subseteq E$ . Il existe un plus petit s.e.v de  $E$  contenant  $A$ . Il est unique et on l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré** par  $A$ . On le note  **$\text{Vect}(A)$** .

## Preuve

$E$  est un s.e.v de  $E$  contenant  $A$ . Donc il existe des s.e.v de  $E$  qui contiennent  $A$ . L'intersection  $F$  de ces s.e.v est un s.e.v de  $E$  contenant  $A$ . Il est le plus petit s.e.v qui contient  $A$ . En effet, si  $A \subseteq H$ , où  $H$  est un s.e.v de  $E$ , alors  $F \subseteq H$ . □

### Proposition 3

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v et  $A \subseteq E$ ,  $A \neq \emptyset$ . Alors  $\text{Vect}(A)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de  $A$ , autrement dit

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{u}_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in A \right\}.$$

### Remarque

Donc un vecteur  $\vec{u} \in E$  est dans  $\text{Vect}(A)$ , si et seulement si, il existe  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in A$  et des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que  $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$ .

## Exemple

Considérons dans  $\mathbb{R}^2$  deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Alors  $U = \text{Vect}(\{\vec{u}\})$  et  $V = \text{Vect}(\{\vec{v}\})$ .

## Exercice

Montrer que  $U + V = \text{Vect}(U \cup V)$ .

## Définition 5

Soit  $F$  un s.e.v du  $\mathbb{K}$ -e.v  $E$  et  $S \subseteq E$ .

- On dit que  $S$  est une **partie génératrice** de  $F$  si

$$F = \text{Vect}(S).$$

- On dit que  $S$  est **libre**, ou que les vecteurs de  $S$  sont **linéairement indépendants**, si

pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , pour tous  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in S$ ,

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

- On dit que  $S$  est une **base** de  $E$ , si elle est génératrice et libre.

## Exemples

- Dans  $\mathbb{R}^2$ , l'espace vectoriel  $F$  engendré par les deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vérifie  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Vect}(\vec{u}, 2\vec{u}) = \text{Vect}(\vec{u})$  et donc la famille  $\{\vec{u}\}$  est génératrice de  $F$ .

- Dans  $\mathbb{R}^2$ , la famille  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  est libre où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

## Théorème 1

Tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul admet une base. Toutes les bases ont la même cardinalité : si  $B_1$  et  $B_2$  sont deux bases, alors il existe une bijection entre  $B_1$  et  $B_2$ .

## Définition 6

On dit d'un  $\mathbb{K}$ -e.v  $E$  qu'il est de **dimension finie** s'il admet une base finie. Le cardinal (le nombre d'éléments) d'une base est appelé la **dimension** de  $E$  et est noté  **$\dim(E)$** .

## Exemple 1

Dans  $\mathbb{R}^n$ , considérons la famille  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  où pour  $1 \leq i \leq n$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  appelée la **base canonique** de  $\mathbb{R}^n$ . On a donc  $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ .

## Exemple 2

Dans  $\mathbb{R}_n[X]$ , le  $\mathbb{R}$ -e.v des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ , la famille des polynômes

$$P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2, \dots, P_n(X) = X^n$$

forme une base. Donc  $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ .

## Théorème de la base incomplète

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $L$  une partie libre et  $G$  une partie génératrice de  $E$ . Alors on peut compléter  $L$  par des éléments de  $G$  pour former une base de  $E$ .

Autrement dit, il existe  $F \subseteq G \setminus L$  tel que  $L \cup F$  soit une base de  $E$ .

## Théorème de la base incomplète (version en dimension finie)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  une **famille libre** de  $E$  et soit  $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m\}$  une **famille génératrice** de  $E$ .

Alors il existe  $\vec{g}_{i_1}, \dots, \vec{g}_{i_p}$  de  $\mathcal{G}$  telle que la famille  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n, \vec{g}_{i_1}, \dots, \vec{g}_{i_p}\}$  forme une base de  $E$ .

## Proposition 4

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie  $n$ . Alors :

- Toute famille libre de  $E$  a au plus  $n$  éléments.
- Toute famille génératrice de  $E$  a au moins  $n$  éléments.
- Toute famille libre peut être complétée en une base de  $E$ .

## Proposition 5

Soit  $B$  une famille de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -e.v  $E$  de dimension finie  $n$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $B$  est une base de  $E$  ;
- $B$  est une famille libre à  $n$  éléments ;
- $B$  est une famille génératrice à  $n$  éléments.

# Exemple récapitulatif sur la base incomplète

## Exemple récapitulatif

Considérons dans  $\mathbb{R}^3$  la famille  $\mathcal{U}$  des deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors  $\mathcal{U}$  est une famille libre. En effet, soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ . Alors

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Donc  $\alpha = \beta$  et  $5\alpha = 0$ . Par conséquent  $\alpha = \beta = 0$ .

# Exemple récapitulatif sur la base incomplète

## suite de l'exemple

On peut compléter la famille libre  $\mathcal{U}$  par des éléments de *la base canonique*  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  pour former une base de  $E$ .

On peut choisir par exemple  $\vec{e}_1$ . Vérifions si  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}$  est libre. Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{e}_1 = \vec{0}$ . On obtient  $2\alpha + 3\beta + \gamma = 0$  et  $\alpha = \beta$ . Donc  $\gamma = -5\alpha$  et  $\alpha = \beta$ . Par conséquent la famille  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}$  n'est pas libre.

Choisissons  $\vec{e}_2$ . Vérifions si  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$  est libre. Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{e}_2 = \vec{0}$ . On obtient  $2\alpha + 3\beta = 0$ ,  $\alpha - \beta + \gamma = 0$  et  $\alpha = \beta$ .

Donc  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , par conséquent la famille  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$  est libre.

Comme  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$  et comme  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$  est une famille libre constituée de trois vecteurs, elle forme une base.

## Définition 7

Si  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  est une base d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , alors pour tout  $\vec{u} \in E$ , il existe des uniques scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$$

qui sont appelés les **composantes** de  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

### Proposition 6 (Formule de Grassmann)

Soient  $F$  et  $G$  deux s.e.v d'un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie. On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

## Applications linéaires

## Définition 8

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v et  $f : E \rightarrow F$  une application. On dit que  $f$  est **linéaire** si

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$  ;
- Pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in E$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ .

## Exemple 1

Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $f : E \rightarrow E$  l'homothétie de rapport  $\alpha$

$$\vec{u} \mapsto f(\vec{u}) = \alpha \vec{u}.$$

Alors  $f$  est linéaire. En effet :

- $f(\vec{0}) = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .
- Soient  $\vec{u}, \vec{v} \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) &= \alpha(\lambda \vec{u} + \vec{v}) \\ &= \lambda \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v} \\ &= \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}). \end{aligned}$$

## Exemple 2

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Alors  $f$  est linéaire. En effet, pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') = ((\lambda x + x') - (\lambda y + y'), (\lambda x + x') + (\lambda y + y')) \\ &= (\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda y) + (x' - y', x' + y') = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}). \end{aligned}$$

## Exemple 3

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ .

L'application

$$D : E \rightarrow E, D(f) = f'$$

est une application linéaire. En effet :

- $D(\vec{0}) = \vec{0}$ .
- Soient  $f, g \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned} D(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)' \\ &= \lambda f' + g' \\ &= \lambda D(f) + D(g). \end{aligned}$$

## Exemple 4

Une rotation  $R$  d'un angle  $\theta$  autour de l'origine dans  $\mathbb{R}^2$  est une application linéaire. En effet, on a

$$\text{pour } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}.$$

et donc

$$R(\vec{u} + \vec{v}) = R\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (x + x') \cos \theta - (y + y') \sin \theta \\ (x + x') \sin \theta + (y + y') \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{pmatrix} = R(\vec{u}) + R(\vec{v}).$$

De même on a  $R(\lambda \vec{u}) = \lambda R(\vec{u})$ .

## Proposition 7

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v. Alors l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ , noté  $\mathcal{L}(E, F)$ , munit des opérations

$$(f, g) \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x); \quad (\lambda, f) \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

est un  $\mathbb{K}$ -e.v.



## Définition 9

- Une application linéaire de  $E$  dans  $E$  est appelé un **endomorphisme**. Le  $\mathbb{K}$ -e.v  $\mathcal{L}(E, E)$  est noté  $\mathcal{L}(E)$ .
- Une application linéaire bijective est appelée un **isomorphisme**.
- Un endomorphisme bijective est appelé un **automorphisme**.

## Rappel

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

- L'image directe par  $f$  d'une partie  $A \subseteq E$  est :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

- L'image réciproque d'une partie  $B \subseteq F$  est :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

## Proposition 8

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

- Si  $H$  est un s.e.v de  $E$ , alors  $f(H)$  est un s.e.v de  $F$ .
- Si  $G$  est un s.e.v de  $F$ , alors  $f^{-1}(G)$  est un s.e.v de  $E$ .

## Définition 10

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

On appelle :

- **Image de  $f$** , le s.e.v de  $E$  :

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

- **Noyau de  $f$** , le s.e.v de  $E$  :

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

## Exemple

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (x - y, x + y)$ . Alors  $f$  est linéaire (Exercice). On a  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$  et  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ .

En effet pour  $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$  :

- $\vec{u} = (x, y) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0 \text{ et } x + y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ .

En effet pour  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$  : il faut montrer que tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  est l'image d'un vecteur par  $f$ .

- Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Cherchons  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $f(x, y) = (a, b)$ . Cela revient à résoudre  $x - y = a$  et  $x + y = b$ . En additionnant les deux équations on obtient  $2x = a + b$  c'est-à-dire  $x = \frac{a+b}{2}$ . En soustrayant la première équation de la deuxième on obtient  $2y = b - a$  c'est-à-dire  $y = \frac{b-a}{2}$ . Ainsi, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on peut prendre  $(x, y) = (\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$ . Ce qui donne que  $f(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}) = (a, b)$ .  
Donc tout élément de  $\mathbb{R}^2$  appartient à  $\text{Im}(f)$ . D'où  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ .

## Propriété

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  une base de  $E$ . Alors  
 $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n))$ .

## Proposition 10

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $f$  est injective ;
- $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$  ;
- Pour tout  $\vec{u} \in E$ ,  $f(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $f$  est surjective ;
- $\text{Im}(f) = F$ .

## Définition 11

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . La dimension de  $\text{Im}(f)$  est appelée le **rang de  $f$**  et est notée  $\text{rg}(f)$ .

## Théorème (Théorème du rang)

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On a

$$\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$

## Terminologie à retenir

- Une application linéaire de  $E$  dans  $E$  est appelée un **endomorphisme**. Le  $\mathbb{K}$ -e.v  $\mathcal{L}(E, E)$  est noté  $\mathcal{L}(E)$ .
- Une application linéaire bijective est appelée un **isomorphisme**.
- Un endomorphisme bijectif est appelé un **automorphisme**.

## Matrices

## Définition

On appelle **matrice** tout tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où  $a_{ij}$  sont des scalaires (des éléments de  $\mathbb{K}$ ).

- On note

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m},$$

$a_{ij}$  est le coefficient : intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne.

- $M$  est dite de **taille**  $n \times m$  (elle a  $n$  lignes et  $m$  colonnes).

## Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 25 & 1+i \\ 21 & 11 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$A$  est une matrice à coefficients dans  $\mathbb{R}$  (**mais dans  $\mathbb{C}$  aussi**);  $B$  est une matrice à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

## Définition

On dit que  $M$  est une matrice

- **colonne** si elle a une seule colonne ( $m = 1$ ).
- **ligne** si elle a une seule ligne ( $n = 1$ ).
- **carrée** si elle a le même nombre de lignes que de colonnes ( $n = m$ ).

## Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} i & 3 & 5 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice carrée

B est une matrice ligne

C est une matrice colonne

## Remarques & notations

- Une matrice à  $n$  lignes et  $m$  colonnes est aussi appelée matrice de type  $(n, m)$  ou encore matrice  $n \times m$ .
- On note  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices  $n \times m$ .
- On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées  $n \times n$ .

## Remarques & notations

- La **matrice identité**  $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est la matrice carrée dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et les autres coefficients valent 0.

Exemple :

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- La matrice **nulle**  $O_{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Exemple :

$$O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Définition 6 (Somme de deux matrices)

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ ,  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$ ,  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

On définit la **somme**  $A + B$ , une matrice de  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ , par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$$
$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

## Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

## Remarque

On ne somme que des **matrices de même taille**.

## Définition (Multiplication par un scalaire)

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ ,  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

On définit la matrice  $\lambda A$ , une matrice de  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ , par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$$
$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

## Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}; \pi B = \begin{pmatrix} 5\pi & 6\pi \\ 7\pi & 8\pi \end{pmatrix}$$

## Proposition 4

L'ensemble  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  muni de l'addition des matrices  $(A, B) \mapsto A + B$  et de la multiplication par des scalaires  $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de **dimension finie  $n \times m$** .

Le vecteur nul de cet espace est la matrice nulle  $O_{n,m}$ .

## Exemple & exercice

Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  on considère la famille  $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

## Définition (Produit de deux matrices)

Soient  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$  une matrice  $n \times p$  et  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$  une matrice  $p \times m$ .

Le **produit** de  $A$  et  $B$  est la matrice  $n \times m$ , notée  $A \cdot B$ , dont les coefficients  $c_{ij}$  sont définis par :  $c_{ij}$  est le produit scalaire de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  par la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $B$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

## Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6) = (32).$$

## Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 2 \\ 3 \times 0 + 4 \times 1 & 3 \times 2 + 4 \times 2 \\ 5 \times 0 + 6 \times 1 & 5 \times 2 + 6 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 14 \\ 6 & 22 \end{pmatrix}$$

## Remarques

- (1) Pour que le produit de  $A$  par  $B$  ait un sens il faut que le nombre de colonnes de  $A$  soit le même que le nombre de lignes de  $B$ .
- (2) Le produit d'une matrice de type  $(n, p)$  par une matrice de type  $(p, m)$  est une matrice de type  $(n, m)$ .

## Remarques

(1) On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve qu'en général  $A \cdot B \neq B \cdot A$  et  $A \cdot B = O$  n'implique pas forcément  $A = O$  ou  $B = O$  ( $O$  désigne la matrice nulle).

(2) Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  on a (exercice)

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

## Propriétés

Les propriétés suivantes sont vraies sous hypothèse que les produits considérés ont un sens :

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  ;
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$  ;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  ;
- $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$ .

## Notations & conventions

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ fois}}.$$

## Remarque

On a

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

et si  $AB \neq BA$  alors

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

## Proposition 5 (Formule du binôme pour les matrices)

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tels que  $AB = BA$ .

Alors pour tout  $n \geq 0$  on a

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

où  $\binom{n}{k}$  est le coefficient binomial :  $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$