CONTRÔLE FINAL

Vendredi 22 décembre 2023

Durée : 2 heure (14h à 16h)

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours - 2 points

— Soient $(E1, \star)$ et $(E2, \cdot)$ deux groupes. Soit l'application $f : (E1, \star) \to (E2, \cdot)$ de $E1$ dans $E2$. Quand dit-on que f est un morphisme de groupes ?

— Rappeler la définition d'une **série alternée** et donner son **critère de convergence** tel que annoncé dans le cours.

Exercice 1 – 4 points

Résoudre suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x + y - z & = & 1 \\ x - 2y + 2z & = & m \\ x + y - z & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 2 – 6 points

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A
2. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ formée de vecteurs propres de A, une matrice diagonale D ainsi qu'une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n .

Exercice 3 – 4 points

Donner la nature des séries de terme général U_n suivantes

i) $\sum_{n \geq 1} U_n$, avec $U_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n} + n}$

ii) $\sum_{n \geq 1} U_n$, avec $U_n = \sin(\dfrac{1}{n}) - \dfrac{1}{n}$

iii) $\sum_{n \geq 1} U_n$, avec $U_n = \left(\dfrac{1}{\ln(n+1)}\right)^n$

iv) $\sum_{n \geq 1} U_n$, avec $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}$

Exercice 4 – 4 points

Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes

i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(n^2+e^n)} z^n$ avec $z \in \mathbb{R}$

ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{\sqrt{n}} z^n$ avec $z \in \mathbb{R}$

iii) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big) z^n$ avec $z \in \mathbb{R}$

iv) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin(2\pi n) z^n$ avec $z \in \mathbb{R}$

Exercice 5 – Cet exercice est un Bonus noté sur 2.5 points

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$F := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) | f'' - 4f = 0\}$$
est un sous-espace vectoriel de E.
2. On admet que $\dim F = 2$. Laquelle des trois couples des fonctions $f_1, \dots, f_6$ suivantes peut être utilisée comme base de F ?
$$f_1(x) = \sinh(x)\,,\ f_2(x) = \cosh(x)\,,$$
$$f_3(x) = \sinh(2x)\,,\ f_4(x) = \cosh(2x),$$
$$f_5(x) = \sinh(4x)\,,\ f_6(x) = \cosh(4x)\,.$$
Justifiez pourquoi votre choix constitue une base.
3. Montrer que la fonction g,
$$g(x) = \exp(2x)\,,$$
appartient à F et l'exprimer comme une combinaison linéaire de votre base.

rappel : $\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ et $\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.