# CONTRÔLE CONTINU Remplacement

**Janvier 2025**

**Durée : 45 minutes**

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

## Exercice 1

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x - y - z = 0$, c'est-à-dire pour tout $\vec{u} = (x, y, z) \in F$ on a $x - y - z = 0$.

1. Donner une base de F.
2. Déterminer une base orthonormée de F.
3. Calculer la projection orthogonale du vecteur $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$ sur F.

## Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}})}{n^3 \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})}.$$

1. Montrer que $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$ et en déduire la limite $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
2. Que pouvez-vous dire sur la nature de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ ? .