# CONTRÔLE CONTINU 1

**Mercredi 4 décembre 2024**
**Durée : 1 heure (14h à 15h)**

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

**Question de cours. (2 points)**
Enoncer le théorème spectral pour les matrices réelles symétriques.

**Exercice 1. (5 points)**

Soit $E = \mathbb{R}^4$ munit du produit scalaire canonique.

1. Montrer que les vecteurs $u = (1, 1, 0, 1), v = (1, 2, -1, 0)$ et $w = (-1, 0, 2, 1)$ forme une famille libre.
2. Déterminer une base orthonormée de $F = \{u, v, w\}$ par orthonormalisation de Gram-Schmidt.

**Exercice 2. (5 points)**

Soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Sans faire de calculs, justifier que $J$ est diagonalisable.
2. Calculer les valeurs propres de $J$.
3. Déterminer une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $J = PDP^{-1}$.

**Exercice 3. (5 points)**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la matrice $A$ est diagonalisable.
2. Diagonaliser $A$.
3. En déduire une expression pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $A^n$.

**Exercice 4. (3 points)**

Déterminer la nature de la série numérique suivante :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(1 + n^2)}{n^2 \sqrt{n}}.$$