CONTRÔLE CONTINU 1

Mercredi 23 octobre 2024

Durée : 1 heure (10h à 11h)

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours - (1 point)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F. On suppose que E est de dimension finie.

— Que dit le théorème du rang ?

Exercice 1 (3 points)

Soit l'ensemble G défini par $G = \{(x + 2y, x - y, 3x + y), x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$

1. Montrer que $(G, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de G.

Exercice 2 (3 points)

Dans $\mathbb{R}^4$, soit la famille $\mathcal{F} = \{V_1, V_2, V_3\}$ telle que $V_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

— Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$.

Exercice 3 (5 points)

Soit l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3, -x_1 - 2x_3) \end{array}$$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. En déduire le rang de f.

Exercice 4 (6 points)

En appliquant l'algorithme de Gauss (Pivot de Gauss), résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y - 6z - 2t = 2 \\ 3x + 6y - 7z + 4t = 2 \\ 5x + 10y - 11z + 6t = 3 \end{array} \right.$$

Exercice 5 (2 points)

Résoudre par la méthode de Cramer le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}x + 2y = 6 \\ x + y = 4 \end{array} \right.$$