Feuille d'exercices 8 : Systèmes linéaires

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n, \qquad u_0 = 1, \quad u_1 = 1.$$

a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ pour tout $n \geqslant 0$. Donner une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

b) Si A est diagonalisable, diagonaliser A.

c) En déduire les coefficients de A^n en fonction de n pour tout $n \geqslant 0$ et en déduire une expression de u_n en fonction de n pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère la suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \qquad u_0 = a, \quad u_1 = 1.$$

a) En utilisant la stratégie de l'exercice précédent donner une expression pour u_n en fonction de n et a.

b) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ en fonction de a.

Exercice 3 On considère le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x \\ z' &= x + y + z \end{cases} .$$

a) Déterminer l'ensemble des solutions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $x, y, z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et en donner une base constituée de vecteurs propres pour l'opérateur de dérivation.

b) Déterminer toutes les solutions constantes du système.

c) Est-ce qu'il existe des solutions x, y, z telles que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$?

d) Est-ce qu'il existe des solutions x, y, z telles que $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty$?

Exercice 4 On considère une solution x, de classe $\mathcal{C}^2$, de l'équation différentielle

$$x''(t) + 5x'(t) - 6x(t) = 0.$$

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X'(t) = AX(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que A est diagonalisable et en déduire une expression pour x en fonction de $x(0)$ et $x'(0)$.

c) On fixe les conditions initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$. Est-ce que la solution correspondant à ces conditions initiales est bornée ?

d) Pour quelles conditions initiales la solution x est-elle bornée pour $t \geqslant 0$?

Exercices supplémentaires d'entraînement

Exercice 5 On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

a) Déterminer les valeurs propres de A dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

c) Donner une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

d) Existe-t-il des fonctions non toutes nulles $x, y, z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} x'(t) &= 5x(t) - 3y(t) \\ y'(t) &= 6x(t) - 4y(t) \\ z'(t) &= 6x(t) - 3y(t) - z(t) \end{cases} \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \ \lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \ \lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme défini par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 4x - 3y \end{pmatrix}\right).$$

On note $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a) On pose $P(X) = X^2 - 1$. Calculer $P(f)(e_i)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2$. En déduire que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

b) Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f)$. Calculer $P(A)$ et retrouver le résultat de la question a.