

Feuille d'exercices 6 : Sous-espaces propres, valeurs propres

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 Pour chacun des endomorphismes $f : E \rightarrow E$ suivants et chacune des valeurs données au réel λ , donner une base de $E_\lambda(f)$ ($= \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$), et dire si λ est valeur propre de f ou non :

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ -2x - y \end{pmatrix}$; $\lambda = 0$, puis $\lambda = 1$;
- b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5x - 3y - 3z \\ 3x - y - 3z \\ 3x - 3y - z \end{pmatrix}$; $\lambda = -1$, puis $\lambda = 2$.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -6 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et soit $\mathcal{B} = (U, V, W)$.

- a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A .
- b) Quelles sont les valeurs propres de A ? Déterminer A^2 .

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et soit $\mathcal{B} = (U_1, U_2)$.

- a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de A .
- b) Soit $U = 2U_1 - U_2$. Résoudre $AX = U$.

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{C}_2[X]$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré ≤ 2 . On considère l'endomorphisme de E défini par

$$f(P) = (X^2 + 1)P'' + (X + 1)P' + P.$$

- a) Déterminer le polynôme caractéristique de f .
- b) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f .

Exercice 5 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Déterminer le rang de f et la dimension de son noyau. En déduire que 0 est valeur propre de f .
- b) Vérifier que le vecteur $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de f .
- c) Construire une base $\mathcal{B}$ constituée de vecteurs propres de f , donner la matrice de f dans cette base et déterminer toutes les valeurs propres de f .

Exercices supplémentaires d'entraînement

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Quelles sont les valeurs propres de A ?
- b) Montrer que tous les sous-espaces propres de A sont des droites vectorielles et en donner des vecteurs directeurs.
- c) Donner une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose $\Phi(f)$ la fonction $g \in E$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^1 e^{x-t} f(t) dt.$$

Montrer que Φ est un endomorphisme de E . Déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres.

Exercice 8 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice à préparer pour la semaine suivante

Exercice 9 On considère les matrices suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si ces matrices sont diagonalisables. Si c'est le cas, les écrire sous la forme PDP^{-1} où P est une matrice inversible et D une matrice diagonalisable.