Feuille d'exercices 5 : Déterminants, suite et fin

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 Soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ avec $adf \neq 0$ et soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la comatrice de A.

b) Calculer l'inverse de A en utilisant la formule de Cramer.

Exercice 2 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

a) Par des opérations sur les lignes de A_n, montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\det(A_n) = \det(A_{n-1})$.

b) En déduire la valeur de A_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 3 Pour quelles valeurs de $x, y \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4 Les nombres 111, 148 et 481 sont divisibles par 37. Sans le calculer, montrer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$ est divisible par 37.

Exercice 5 Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $AB = 0$, $A \neq 0$ et $B \neq 0$. Montrer que $\det(A) = \det(B) = 0$.

Exercice 6 a) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ y & 2 & 5 \\ z & 3 & 6 \end{vmatrix}$ pour x, y, z réels.

b) Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Montrer que le sous-espace V de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v est de dimension 2 et que $w \in V$ si et seulement si la famille (w, u, v) est liée.

c) En déduire une équation cartésienne de V.

Exercices supplémentaires d'entraînement

Exercice 7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, c'est-à-dire telle que ${}^tA = -A$. Montrer que si A est inversible, alors n est pair.

Exercice 8 Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout nombre complexe $x \in \mathbb{C}$, on note $\Delta_n(x)$ le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

a) Pour $n \geqslant 1$, exprimer $\Delta_{n+2}(x) - \Delta_{n+1}(x)$ en fonction de $\Delta_{n+1}(x) - \Delta_n(x)$.

b) En déduire la valeur de $\Delta_n(x)$.

Exercice 9 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et soit $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de A.

a) Montrer que si $\det(A) = 0$ alors $\det(\mathrm{Com}(A)) = 0$.

b) Montrer que si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, alors $\mathrm{Com}(A) = 0$.

c) Montrer que si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1$.

Exercice 10 Déterminer une équation cartésienne du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice à préparer pour la semaine suivante

Exercice 11 Pour chacun des endomorphismes $f : E \to E$ suivants et chacune des valeurs données au réel λ, donner une base de $E_\lambda(f)$ $(= \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E))$, et dire si λ est valeur propre de f ou non :

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ -2x-y \end{pmatrix}$; $\lambda = 0$, puis $\lambda = 1$;

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5x-3y-3z \\ 3x-y-3z \\ 3x-3y-z \end{pmatrix}$; $\lambda = -1$, puis $\lambda = 2$.