Feuille d'exercices 4 : Déterminants

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 Soit $n \geqslant 1$ un entier.

a) Soient a, b, c trois entiers distincts de $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que $(a, b) \circ (b, c) = (a, b, c)$.

b) Soit $2 \leqslant k \leqslant n$ et soient $a_1, \ldots, a_k$ k entiers distincts de $\{1, \ldots, n\}$. Montrer par récurrence sur k que

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_1, a_2) \circ \cdots \circ (a_{k-1}, a_k).$$

c) En déduire que si σ est un k-cycle de $\mathfrak{S}_n$, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}$.

d) Déterminer la signature de l'élément

$$(3, 4) \circ (1, 2, 7) \circ (5, 8, 9) \in \mathfrak{S}_9.$$

Exercice 2 Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \ln 3 & 0 \\ \sqrt{2\pi} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des réels.

Exercice 3 Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et soit $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tMM$. En déduire la valeur de $|\det(M)|$.

Exercice 5 Soit a un nombre réel. Calculer les déterminants des matrices suivantes. Préciser quelles valeurs de a ces matrices sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a+1 & a+2 \\ 1 & a+2 & 2a+4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(a) & 1 & -\sin(a) \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin(a) & 0 & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 Soient a, b, c, d des nombres réels et soit $n > 1$ un entier. Calculer le déterminant des matrices suivantes. Pour quelles valeurs de a, b, c, d sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & c & c & c \\ a & d & d & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix},$$

Exercices supplémentaires d'entraînement

Exercice 7 Calculer les racines du polynôme

$$P(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$$

(on pourra commencer par simplifier le déterminant par des opérations sur les lignes).

Exercice 8 a) Développer les polynômes en x suivants :

$$Q_1(x) = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}, \quad Q_2(x) = \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}.$$

b) Proposer une formule pour le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

Exercice 9 (Déterminant de Vandermonde) Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des réels. Pour $j = 1, \cdots, n$, on note v_j le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1^{j-1}, \cdots, x_n^{j-1})$. On veut calculer le déterminant $V(n)$ de la famille $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$.

$$V(n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

a) Exprimer $\det(v_1, v_2 - x_n v_1, v_3 - x_n v_2, \cdots, v_n - x_n v_{n-1})$ en fonction de $V(n)$.

b) En déduire une relation de récurrence entre $V(n)$ et $V(n-1)$.

c) Calculer $V(n)$.

d) En déduire les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x_1 & \cdots & nx_1^{n-1} \\ 1 & 2x_2 & \cdots & nx_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2x_n & \cdots & nx_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1+1 & \cdots & x_1^{n-1}+n-1 \\ 1 & x_2+1 & \cdots & x_2^{n-1}+n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n+1 & \cdots & x_n^{n-1}+n-1 \end{vmatrix}.$$

Exercice à préparer pour la semaine suivante

Exercice 10 Soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ avec $adf \neq 0$ et soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la comatrice de A.

b) Calculer l'inverse de A en utilisant la formule de Cramer.

Exercice 11 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

a) Par des opérations sur les lignes de A_n, montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\det(A_n) = \det(A_{n-1})$.

b) En déduire la valeur de A_n pour tout entier $n \geqslant 1$.