Feuille d'exercices 3 : Groupe symétrique

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 a) Déterminer $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Calculer l'inverse de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

c) Soient a, b, c, d tous distincts dans $\{1, \ldots, n\}$. Que vaut $(a, b) \circ (c, d) \circ (d, a)$?

Exercice 2 Soit G un groupe fini de loi $*$. Notons $g_1, \ldots, g_n$ les éléments de G. On appelle *table du groupe* G le tableau à n lignes et n colonnes dont l'entrée à la i-ème ligne et j-ème colonne est $g_i * g_j$.

a) Faire la liste des éléments de $\mathfrak{S}_3$ et donner la table de groupe de $\mathfrak{S}_3$.

b) On note $j = e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$. Vérifier que l'ensemble $\mu_3 = \{1, j, j^2\}$ est un groupe pour la loi de multiplication. Donner la table de groupe de μ_3.

Exercice 3 Faire la liste des éléments de $\mathfrak{S}_4$. Calculer la signature de chacun de ces éléments.

Exercice 4 a) Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Décomposer σ en produit de transpositions et déterminer sa signature.

b) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma^3 = \mathrm{Id}$. Quelle est sa signature ?

Exercice 5 On considère un groupe $(G, *)$.

a) Soit h un élément de G. Montrer que l'application f de G dans G définie par $f(g) = h * g$ est une bijection.

b) Montrer que l'application j de G dans G définie par $j(g) = g^{-1}$ est une bijection.

Exercices supplémentaires d'entraînement

Exercice 6 Soit $n \geqslant 1$ un entier. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle *support* de σ, l'ensemble des entiers $1 \leqslant i \leqslant n$ tels que $\sigma(i) \neq i$. On note $\mathrm{Supp}(\sigma)$ cet ensemble.

a) Calculer le support de $\sigma = (2, 3, 4)$ dans $\mathfrak{S}_5$.

b) Si σ et τ sont deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ ayant des supports *disjoints* (c'est-à-dire que $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathrm{Supp}(\tau) = \emptyset$). Montrer que $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.

Exercice 7 Si $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des éléments σ de $\mathfrak{S}_n$ tels que $\varepsilon(\sigma) = 1$.

a) Montrer que $\mathcal{A}_n$ est stable par composition et par inverse.

b) Décrire tous les éléments de $\mathcal{A}_n$.

c) Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une transposition. Montrer que si un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'est pas dans $\mathcal{A}_n$, il s'écrit de façon unique sous la forme $\sigma' \circ \tau$ avec $\sigma' \in \mathcal{A}_n$. En déduire le cardinal de $\mathcal{A}_n$.

Exercice à préparer pour la semaine suivante

Exercice 8 Soit $n \geqslant 1$ un entier.

a) Soient a, b, c trois entiers distincts de $\{1, \dots, n\}$. Montrer que $(a, b) \circ (b, c) = (a, b, c)$.

b) Soit $2 \leqslant k \leqslant n$ et soient $a_1, \dots, a_k$ k entiers distincts de $\{1, \dots, n\}$. Montrer par récurrence sur k que

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1, a_2) \circ \cdots \circ (a_{k-1}, a_k).$$

c) En déduire que si σ est un k-cycle de $\mathfrak{S}_n$, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}$.

d) Déterminer la signature de l'élément

$$(3, 4) \circ (1, 2, 7) \circ (5, 8, 9) \in \mathfrak{S}_9.$$