Université Claude Bernard Lyon 1
Algèbre 3 - L2 Maths — Semestre d'automne 2025-2026

Feuille d'exercices 2 : révisions d'algèbre linéaire et groupe symétrique

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ une base d'un espace vectoriel E. On note f l'unique endomorphisme de E tel que $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$ et $f(v_3) = v_1$ et g l'unique endomorphisme de E tel que $g(v_1) = v_2$, $g(v_2) = v_1$ et $g(v_3) = v_3$.

a) Donner les matrices des endomorphismes f et g dans la base $\mathcal{B}$.

b) Donner les matrices des endomorphismes $g \circ f$ et $f \circ g$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 Soit A la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 8 & -16 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini, pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, par

$$f(v) = Av.$$

Soit $E = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 2 \cdot v\}$ et soit $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = -2 \cdot v\}$.

a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. En donner une base et donner leur dimension.

b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

c) Soit v_1 un vecteur directeur de E et (v_2, v_3) une base de F. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

Exercice 3 a) Déterminer le rang de la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 9 & 0 & -6 & 3 \\ 18 & 9 & -17 & 7 \end{pmatrix}$ ainsi qu'une base de son noyau.

b) Donner une base de l'image de A.

c) Calculer Av pour tout $v \in \operatorname{Im} A$ et en déduire que $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ sont en somme directe.

d) Donner une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}.$$

Exercices supplémentaires d'entraînement

Exercice 4 Dans chacun des cas suivants, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\operatorname{Ker} A$ et, si $\operatorname{Ker} A = 0$, déterminer A^{-1}.

a) $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, puis $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, puis $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, $f(A) = AX$. On pose $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$.

a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Donner la matrice B de u dans la base $\mathcal{B}$. Quelle est la relation entre A et B ?

c) Donner une base de $\operatorname{Ker}(u)$ et une base de $\operatorname{Im}(u)$.

Exercice à préparer pour la semaine suivante

Exercice 6 a) Déterminer $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Calculer l'inverse de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

c) Soient a, b, c, d tous distincts dans $\{1, \ldots, n\}$. Que vaut $(a, b) \circ (c, d) \circ (d, a)$?