Feuille d'exercices 12

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

a) Calculer T^n pour tout $n \geqslant 1$.

b) Si $\lambda \neq 0$, calculer T^{-n} pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 2 Déterminer les décompositions de Dunford–Jordan des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 On considère la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que le polynôme caractéristique de A vaut $X^3 + X^2 - X - 1$.

b) Déterminer les valeurs propres de A dans $\mathbb{R}$.

c) Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A.

d) Donner une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

e) Déterminer le polynôme minimal de A.

f) Calculer $\exp(tT)$ pour tout réel t.

g) Déterminer trois fonctions x, y, z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}.$$

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle telle que

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}.$$

Donner une expression de u_n en fonction de n, u_0, u_1 et u_2.

Exercices supplémentaires d'entraînement

Exercice 5 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

a) Calculer $J_n(\lambda)^k$ pour tout entier $k \geqslant 0$.

b) Calculer $\exp(tJ_n(\lambda))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = -4u_n + 4u_{n+1}.$$

a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \geqslant 0, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

b) Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

c) Donner une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A = PTP^{-1}$. Donner la décomposition de Dunford–Jordan de A.

Exercice 8 Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. On rappelle que dans la feuille 11 on a trouvé une matrice inversible P et une matrice triangulaire T telles que $A = PTP^{-1}$. On peut par exemple choisir $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\exp(tT)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer des fonctions $x, y, z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} x' &= 2x - y - z \\ y' &= 2x + y - 2z \\ z' &= 3x - y - 2z. \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) &= 2 \\ y(0) &= 2 \\ z(0) &= 3 \end{cases}$$