

## Feuille d'exercices 11 : Trigonalisation

### Exercices à traiter en TD

**Exercice 1** Pour chacune des matrices suivantes déterminer les sous-espaces propres, les sous-espaces caractéristiques, le polynôme minimal et déterminer si elles sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2** Soit  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  associé.

- a) Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de  $A$ .
- b) Déterminer les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de  $A$ .
- c) Démontrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice  $P$  telle que  $A = PBP^{-1}$ .

**Exercice 3** Pour chacune des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -9 \\ 25 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces caractéristiques ;
- b) La mettre sous la forme  $PTP^{-1}$  où  $P$  est inversible et  $T$  triangulaire supérieure.
- c) Déterminer les polynômes caractéristiques et polynômes minimaux.

**Exercice 4** Répondre par oui ou par non aux assertions suivantes. Dans le cas d'une réponse négative, donner un contre exemple.

- a) Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.

- b) Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est simplement scindé.
- c) Une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.
- d) Une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.
- e) Une matrice réelle dont les multiplicités géométriques sont égales aux multiplicités algébriques est diagonalisable.

**Exercice 5** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ . Montrer que si  $A^{50} = 0_n$ , alors  $A^n = 0_n$ . Que dire si de plus  $A$  est diagonalisable ?

### Exercices supplémentaires d'entraînement

**Exercice 6** Pour chacune des matrices ci-dessous, répondre aux questions suivantes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Déterminer le polynôme caractéristique  $\chi_A(X) = \det(XI_3 - A)$ .
- b) Calculer les valeurs propres de  $A$  et en déterminant un seul sous-espace propre, montrer que  $A$  est diagonalisable.
- c) Déterminer le polynôme minimal  $\pi_A(X)$  de  $A$ .
- d) En utilisant le polynôme minimal, donner une formule pour  $A^{-1}$ .
- e) Expliciter une matrice diagonale  $D$  ainsi qu'une matrice inversible  $P$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .

**Exercice 7** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Déterminer une matrice inversible  $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

et une matrice triangulaire supérieure  $T \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  telles que  $A = PTP^{-1}$ .

### Exercice à préparer pour la prochaine séance

**Exercice 8** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  et soit  $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ .

- a) Calculer  $T^n$  pour tout  $n \geq 1$ .
- b) Si  $\lambda \neq 0$ , calculer  $T^{-n}$  pour tout  $n \geq 1$ .