

Feuille d'exercices 11 : Trigonalisation

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 Pour chacune des matrices suivantes déterminer les sous-espaces propres, les sous-espaces caractéristiques, le polynôme minimal et déterminer si elles sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé.

- Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A .
- Déterminer les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de A .
- Démontrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P telle que $A = PBP^{-1}$.

Exercice 3 Pour chacune des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -9 \\ 25 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces caractéristiques ;
- La mettre sous la forme PTP^{-1} où P est inversible et T triangulaire supérieure.
- Déterminer les polynômes caractéristiques et polynômes minimaux.

Exercice 4 Répondre par oui ou par non aux assertions suivantes. Dans le cas d'une réponse négative, donner un contre exemple.

- Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.

- b) Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est simplement scindé.
- c) Une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.
- d) Une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.
- e) Une matrice réelle dont les multiplicités géométriques sont égales aux multiplicités algébriques est diagonalisable.

Exercice 5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que si $A^{50} = 0_n$, alors $A^n = 0_n$. Que dire si de plus A est diagonalisable ?

Exercices supplémentaires d'entraînement

Exercice 6 Pour chacune des matrices ci-dessous, répondre aux questions suivantes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(XI_3 - A)$.
- b) Calculer les valeurs propres de A et en déterminant un seul sous-espace propre, montrer que A est diagonalisable.
- c) Déterminer le polynôme minimal $\pi_A(X)$ de A .
- d) En utilisant le polynôme minimal, donner une formule pour A^{-1} .
- e) Expliciter une matrice diagonale D ainsi qu'une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

Exercice à préparer pour la prochaine séance

Exercice 8 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

- a) Calculer T^n pour tout $n \geq 1$.
- b) Si $\lambda \neq 0$, calculer T^{-n} pour tout $n \geq 1$.