Feuille d'exercices 1 : Révisions d'algèbre linéaire

Exercices à traiter en TD

Exercice 1 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1, 1+X, 1+X+X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_0 \leftarrow \mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}_0$ vers la base $\mathcal{B}$.

c) Déterminer l'inverse de la matrice $P_{\mathcal{B}_0 \leftarrow \mathcal{B}}$ et en déduire $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_0}$.

d) En déduire les coordonnées de X^2 et de $(X-1)^2$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{B}$ la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

a) Vérifier que l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par $f(M) = AM$ est une application linéaire.

b) Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

c) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (I_2, A, E_{1,1}, AE_{1,1})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

d) Calculer la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$.

e) Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.

f) Montrer que A est inversible et en déduire que f est un isomorphisme.

g) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$.

Exercice 3 Dans les cas suivants, déterminer la dimension du noyau de f et en donner une base.

a) f est l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4.$$

b) f est l'application inéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

c) f est l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Exercices supplémentaires d'entraînement

Exercice 4 Soit $r \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de r les vecteurs $(r,1,1)$, $(1,r,1)$ et $(1,1,r)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la famille $\mathcal{B}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et déterminer les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$.

a) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$, $v = (1+X)^3$.

c) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X+1, (X+1)^2)$, $v = X^2$.

d) $E = \mathbb{R}_4[X]$, $\mathcal{B} = (X-1, X+1, X^2-1, X^3, X^4-X^2)$, $v = (X^2+1)(X-1)$.

Exercice 6 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+\alpha z+t \\ x+z+t \\ y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer, en fonction de la valeur de α, le noyau et l'image de f (on en donnera des bases explicites).

Exercice à préparer pour la semaine suivante

Exercice 7 Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ une base d'un espace vectoriel E. On note f l'unique endomorphisme de E tel que $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$ et $f(v_3) = v_1$ et g l'unique endomorphisme de E tel que $g(v_1) = v_2$, $g(v_2) = v_1$ et $g(v_3) = v_3$.

a) Donner les matrices des endomorphismes f et g dans la base $\mathcal{B}$.

b) Donner les matrices des endomorphismes $g \circ f$ et $f \circ g$ dans la base $\mathcal{B}$.