Contrôle partiel
Mercredi 12 novembre 2025

Durée : 1h30. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits. Justifiez soigneusement vos résultats. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (3 points) a) Donner un exemple d'une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{-i, i\}$.

b) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma^7 = \mathrm{Id}$. Déterminer la signature de σ.

Exercice 2 (3 points) Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Décomposer σ en produit de transpositions et déterminer sa signature. Est-ce que σ est un cycle ?

Exercice 3 (4 points) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$M_x = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & x \\ 0 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x \end{pmatrix}$$

a) Calculer le déterminant de M_x en fonction de x.

b) Déterminer l'ensemble des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice M_x est inversible.

Exercice 4 (5 points) On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

a) Montrer que le polynôme caractéristique de A vaut $X^3 - 11X^2 + 39X - 45$.

b) Déterminer les valeurs propres de A.

c) Déterminer si A est diagonalisable et, si tel est le cas, donner une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A.

Exercice 5 (5 points) Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices M telles que ${}^tM = -M$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $M \in V$, on note

$$f(M) = AMA.$$

a) On pose

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3)$ est une base de V. Quelle est la dimension de V ?

b) Montrer que f est un endomorphisme de V et donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

c) Déterminer les valeurs propres de f et déterminer si f est diagonalisable.