

Devoir maison

Exercice 1 a) Calculons le polynôme caractéristique de A . On trouve

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 1 & X & 0 \\ 0 & 0 & X-3 \end{vmatrix} = (X^2 + 1)(X - 3).$$

Ce polynôme possède une unique racine dans $\mathbb{R}$ et donc $\text{Sp}(A) = \{3\}$. Raisonnons par l'absurde pour montrer que A n'est pas diagonalisable. Supposons A diagonalisable. Alors

$$\mathbb{R}^3 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda(A) = E_3(A).$$

On en déduit que $\mathbb{R}^3 = E_E(A) = \text{Ker}(A - 3I_3)$. Ainsi on a $A - 3I_3 = 0_3$ et donc $A = 3I_3$. Or on voit bien que $A \neq 3I_3$. On aboutit à une contradiction. Ainsi A n'est pas diagonalisable.

b) On a $\chi_A(X) = (X^2 + 1)(X - 3) = (X - i)(X + i)(X - 3)$. Le polynôme caractéristique de A est simplement scindé dans $\mathbb{C}$, donc A est diagonalisable comme matrice de $M_3(\mathbb{C})$. De plus $\text{Sp}(A) = \{i, -i, 3\}$. Déterminons les sous-espaces propres de A . On a

$$\begin{aligned} E_i(A) &= \text{Ker}(A - iI_3) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ E_{-i}(A) &= \text{Ker}(A + iI_3) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 3+i \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+i \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ E_3(A) &= \text{Ker}(A - 3I_3) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, la famille

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

est donc une base de vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres $i, -i$,
 3. La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice de l'endomorphisme associé à A dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

de sorte que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2 a) Calculons le polynôme caractéristique de A . On trouve

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X - (2 + 2i) & -(1 + i) \\ 1 + i & X - i \end{vmatrix} = (X - 2(1 + i))(X - i) + (1 + i)^2 \\ &= X^2 - (2 + 3i)X + (1 + i)^2 + 2i(1 + i) = X^2 - (2 + 3i)X - 2 + 4i. \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme vaut

$$\Delta = (2 + 3i)^2 - 4(-2 + 4i) = -5 + 12i + 8 - 16i = 3 - 4i \neq 0.$$

Le polynôme a donc deux racines simples. Pour les déterminer, il faut commencer par chercher une racine de Δ dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un nombre complexe $a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, tel que $(a + bi)^2 = 3 - 4i$, c'est-à-dire $a^2 - b^2 = 3$ et $2ab = -4$. On peut prendre $a = 2$ et $b = -1$ de sorte que $(2 - i)^2 = 3 - 4i$. Les racines de $\chi_A(X)$ sont donc

$$\frac{2 + 3i + (2 - i)}{2} = 2 + i, \quad \frac{2 + 3i - (2 - i)}{2} = 2i.$$

Ainsi $\text{Sp}(A) = \{2 + i, 2i\}$.

b) Déterminons les sous-espaces propres de A . On a

$$\begin{aligned} E_{2+i}(A) &= \text{Ker}(A - (2 + i)I_2) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} i & 1 + i \\ -(1 + i) & -2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} i & 1 + i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 + i \\ -i \end{pmatrix} \right) \\ E_{2i}(A) &= \text{Ker}(A - 2iI_2) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 + i \\ -(1 + i) & -i \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 + i & i \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 + i \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

- c) Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1+i \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1+i \end{pmatrix} \right)$ est donc une base de vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres $2+i$, $2i$.

Exercice 3 a) Si (u_n) et (v_n) sont deux éléments de E , on définit leur somme comme étant la suite $(u_n + v_n)$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit $\lambda(u_n)$ comme étant la suite (λu_n) . Il faut alors vérifier que E , muni de ces deux opérations, vérifient les axiomes d'un espace vectoriel, c'est-à-dire que, pour $(u_n), (v_n), (w_n)$ dans E et λ, μ dans $\mathbb{C}$, on a

- $((u_n) + (v_n)) + (w_n) = (u_n) + ((v_n) + (w_n))$,
- $(u_n) + (v_n) = (v_n) + (u_n)$,
- $(0) + (u_n) = (u_n)$, $(u_n) + (-u_n) = (0)$,
- $\lambda((u_n) + (v_n)) = \lambda(u_n) + \lambda(v_n)$,
- $(\lambda + \mu)(u_n) = \lambda(u_n) + \mu(u_n)$,
- $\lambda(\mu(u_n)) = (\lambda\mu)(u_n)$, $1(u_n) = (u_n)$.

Toutes ces vérifications sont très faciles une fois les bonnes définitions posées.

- b) Soient (u_n) et (u'_n) deux éléments de E et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Il faut vérifier que $\Phi((u_n) + \lambda(u'_n)) = \Phi((u_n)) + \lambda\Phi((u'_n))$. Posons $(v_n) = \Phi((u_n))$ et $(v'_n) = \Phi((u'_n))$. La suite $\Phi((u_n) + \lambda(u'_n))$ est la suite dont le terme d'indice 0 est $u_0 + \lambda u'_0$ et dont le n -ième terme, pour $n \geq 1$ est

$$\frac{u_n + \lambda u'_n + u_{n-1} + \lambda u'_{n-1}}{2} = \frac{u_n + u_{n-1}}{2} + \lambda \frac{u'_n + u'_{n-1}}{2}.$$

D'un autre côté le terme d'indice 0 de la suite $\Phi((u_n)) + \lambda\Phi((u'_n))$ est $v_0 + \lambda v'_0 = u_0 + \lambda u'_0$ et le terme d'ordre n , pour $n \geq 1$, de cette suite est

$$v_n + \lambda v'_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2} + \lambda \frac{u'_n + u'_{n-1}}{2}.$$

Ainsi tous les termes des suites $\Phi((u_n) + \lambda(u'_n))$ et $\Phi((u_n)) + \lambda\Phi((u'_n))$ coïncident, on a donc bien

$$\Phi((u_n) + \lambda(u'_n)) = \Phi((u_n)) + \lambda\Phi((u'_n))$$

ce qui prouve que Φ est linéaire.

- c) Soit (u_n) un élément de E qui est vecteur propre de E , de valeur propre λ . On a donc $\Phi((u_n)) = \lambda(u_n)$, ce qui signifie que $u_0 = \lambda u_0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{u_n + u_{n-1}}{2} = \lambda u_n.$$

En particulier $(2\lambda - 1)u_n = u_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Si $\lambda = \frac{1}{2}$ on a donc $u_{n-1} = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc (u_n) est la suite nulle, ce n'est donc pas un vecteur propre de Φ . On doit donc avoir $\lambda \neq \frac{1}{2}$. On a alors la relation, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{(2\lambda - 1)} u_{n-1}.$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique et

$$\forall n \geq 0, u_n = (2\lambda - 1)^{-n} u_0.$$

Si $\lambda \neq 1$, l'égalité $u_0 = \lambda u_0$ implique $u_0 = 0$ et donc $u_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. Comme (u_n) est un vecteur propre de Φ , la suite (u_n) est non nulle et on doit donc avoir $\lambda = 1$ et $u_n = u_0$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi les seuls vecteurs propres possibles pour Φ sont les suites constantes non nulles. Réciproquement on vérifie immédiatement qu'une suite constante non nulle est vecteur propre de Φ , de valeur propre 1. Ainsi Φ a une unique valeur propre, $\text{Sp}(\Phi) = \{1\}$ et les vecteurs propres de Φ sont les suites constantes non nulles.

Exercice 4 a) Soit B la matrice $A - (a - b)I_n$. Les coefficients $B_{i,j}$ de B sont donc tous égaux à b . Ainsi toutes les colonnes de B sont égales et non nulles. Le rang de B vaut donc 1. Le théorème du rang implique donc que $\dim \text{Ker}(B) = n - 1 \geq 1$. Comme $\text{Ker}(B) = E_{a-b}(A) \neq \{0\}$, on en déduit que $a - b$ est valeurs propre de A .

b) Soit C la matrice dont toutes les entrées valent 1, on a vu en a que $A - (a - b)I_n = B = bC$. Comme $b \neq 0$, $E_{a-b}(A)$ est le noyau de la matrice C . Ainsi

$$E_{a-b}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}.$$

c) On a

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + (n-1)b \\ a + (n-1)b \\ \vdots \\ a + (n-1)b \end{pmatrix} = (a + (n-1)b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul c'est un vecteur propre de A de valeur propre

$a + (n-1)b$. Ainsi $a + (n-1)b$ est valeur propre de A . Comme $a + (n-1)b \neq a - b$, on a

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda(A) \geq \dim E_{a-b}(A) + E_{a+(n-1)b}(A) \geq n - 1 + 1 = n.$$

Comme par ailleurs

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda(A) \leq n$$

on doit avoir $\dim E_{a+(n-1)b}(A) = 1$ et $\dim E_\lambda(A) = 0$ pour $\lambda \notin \{a - b, a + (n-1)b\}$. On a donc $\text{Sp}(A) = \{a - b, a + (n-1)b\}$.

d) La matrice A est inversible si et seulement si $0 \notin \text{Sp}(A)$ donc, en utilisant la question c si et seulement si $a \neq b$ et $a \neq -(n-1)b$.

e) On a vu en c que

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_{\lambda}(A) \geq \dim E_{a-b}(A) + E_{a+(n-1)b}(A) \geq n-1+1=n.$$

La matrice A est donc diagonalisable (on aurait pu le remarquer dès la question c).

f) Déterminons une base de $E_{a-b}(A)$. On a vu en b que

$$\begin{aligned} E_{a-b}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 + \dots + x_n = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - \dots - x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid (x_2, \dots, x_n) \in K^{n-1} \right\} \\ &= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x_2, \dots, x_n) \in K^{n-1} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

On a vu en a que $\dim E_{a-b} = n-1$. La famille ci-dessus est génératrice de $E_{a-b}(A)$ et possède $n-1$ éléments, c'est donc une base de $E_{a-b}(A)$. On a déjà montré en c que $E_{a+(n-1)b}$ est de dimension 1 et engendré par le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1. On obtient donc une base propre de A en concaténant une base de $E_{a-b}(A)$ et une base de $E_{a+(n-1)b}(A)$. Ainsi la famille

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une base propre de A . Une matrice de passage permettant de diagonaliser A est donc donnée par

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- g) Avec la matrice P obtenue à la question précédente on a donc $P^{-1}AP$ diagonale telle que la valeur propre $a - b$ apparaît $\dim E_{a-b}(A) = n - 1$ fois sur la diagonale et la valeur propre $a + (n - 1)b$ apparaît $\dim E_{a+(n-1)b}(A) = 1$ fois sur la diagonale. Ainsi

$$\det(A) = \det(P^{-1}AP) = (a - b)^{n-1}(a + (n - 1)b).$$

- h) Si $b = 0$, on a $A = aI_n$. La matrice A est donc diagonalisable puisque dans ce cas $K^n = E_a(aI_n)$.

Exercice 5 On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ de trace nulle. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Pour tout $M \in E$, on pose $f(M) = MB - BM$.

- a) Si $M \in E$, on a $\text{Tr}(f(M)) = \text{Tr}(MB - BM) = \text{Tr}(MB) - \text{Tr}(BM) = 0$. Ainsi $f(M) \in E$. Ainsi f est bien une application de E dans E . Montrons que f est linéaire. Si $M_1, M_2 \in E$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f(M_1 + \lambda M_2) = (M_1 + \lambda M_2)B - B(M_1 + \lambda M_2) = M_1B - BM_1 + \lambda(M_2B - BM_2) = f(M_1) + \lambda f(M_2).$$

Ainsi f est linéaire.

- b) Pour simplifier les notations posons

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $M \in E$, on a $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\text{Tr}(M) = 0$. Ainsi $a + d = 0$ et on peut écrire

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = bE_1 + cE_2 + aE_3.$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc génératrice. Vérifions qu'elle est libre. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$aE_1 + bE_2 + cE_3 = \begin{pmatrix} c & a \\ b & -c \end{pmatrix} = 0_E.$$

On a donc $\begin{pmatrix} c & a \\ b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $a = b = c = 0$, et donc la famille est libre. La famille $\mathcal{B}$ est à la fois libre et génératrice de E , c'est donc une base de E .

c) On calcule les images des éléments de $\mathcal{B}$ par f . On a

$$f(E_1) = E_1 B - B E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2E_1 + 2E_3$$

$$f(E_2) = E_2 B - B E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -2E_2$$

$$f(E_3) = E_3 B - B E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -4E_2$$

On a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Posons $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On calcule le polynôme caractéristique de f . Il s'agit de

$$\chi_f(X) = \chi_M(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 0 & X+2 & 4 \\ -2 & 0 & X \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X+2 & 4 \\ 0 & X \end{vmatrix} = (X-2)(X+2)X.$$

Les valeurs propres de f sont les racines de $\chi_f(X)$ dans $\mathbb{R}$. On a donc

$$\text{Sp}(f) = \{2, -2, 0\}.$$

e) On détermine les sous-espaces propres de f . Remarquons que $\dim E_{\lambda}(f) \geq 1$ pour toute $\lambda \in \text{Sp}(f)$. Or on a

$$\dim E = 3 \geq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim E_{\lambda}(f) \geq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} 1 = \text{Card}(\text{Sp}(f)) = 3.$$

Toutes les inégalités sont donc des égalités et on a donc $\dim E_{\lambda}(f) = 1$ pour toute valeur propre λ . Comme on a déjà remarqué que $f(E_2) = -2E_2$, on a $E_2 \in E_{-2}(f)$ et donc $E_{-2}(f) = \text{Vect}(E_2)$ pour raisons de dimension.

Calculons $E_2(f)$. On a

$$\text{Ker}(M - 2I_2) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Le vecteur de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $E_1 - E_2 + E_3 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } E_2(f) = \text{Vect}(E_1 - E_2 + E_3).$$

Calculons $E_0(f) = \text{Ker}(f)$. On a

$$\text{Ker}(M) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On a donc $E_0(f) = \text{Vect}(2E_2 - E_3)$ où $2E_2 - E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

f) On a $\text{Card}(\text{Sp}(f)) = 3 = \dim E$. L'endomorphisme f est donc diagonalisable.