Entraînement hivernal, corrigé

Exercice 1 a) Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -6 \\ -3 & -4 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

i) Calculer les valeurs propres de A.
Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X+1)(X-2)^2$, d'où les valeurs propres de la matrice A sont -1 et 2.

ii) Pour chaque valeur propre λ de A, calculer le rang de la matrice $A - \lambda I_3$.
$\mathrm{rg}(A + I_3) = 2$ et $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1$.

iii) En déduire que la matrice A est diagonalisable.
D'après la question précédente (et le théorème de rang), $\dim E_{-1}(A) = 3-2 = 1$ et $\dim E_2(A) = 3 - 1 = 2$ ainsi les multiplicités algébrique et géométrique de chaque valeur propre coïncident. Donc, la matrice A est diagonalisable.

iv) Donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres.
Par exemple, on a

$$E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right),$$

donc, on peut prendre $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

v) Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D vérifiant $D = P^{-1}AP$.
Posons $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Ensuite, on considère le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{array}{rrrr} x'(t) = & 8x(t)+ & 12y(t)+ & -6z(t) \\ y'(t) = & -3x(t)- & 4y(t)+ & 3z(t) \\ z'(t) = & 3x(t)+ & 6y(t)- & z(t) \end{array}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 2, y(0) = 0, z(0) = 1$.

i) Exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Par calcul direct, on a $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ii) En déduire la solution du système d'équations différentielles ci-dessus.
D'après la Question 1. v), on a

$$\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Notons que la question précédente implique $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \exp(tA)\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} &= \exp(tA)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (P\exp(tD)P^{-1})P\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= P\exp(tD)\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-t} + 4e^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} \\ -e^{-t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} -13 & 10 & 10 \\ 15 & -8 & -10 \\ -30 & 20 & 22 \end{pmatrix}$. Nous allons calculer A^n $(n \in \mathbb{Z})$ de deux manières différentes.

a) Déterminer le rang de la matrice $A - 2I_3$.
Par définition, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -15 & 10 & 10 \\ 15 & -10 & -10 \\ -30 & 20 & 20 \end{pmatrix}$, d'où $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1$.

b) Montrer que la matrice A est diagonalisable.
D'après la Question 1., la multiplicité géométrique associée à la valeur propre 2 est 2. Le calcul du polynôme caractéristique de A nous donne $\chi_A(X) = (X+3)(X-2)^2$. Les valeurs propres de A sont donc -3 et 2 avec $m_{alg}(-3) = 1$ et $m_{alg}(2) = 2$. On en déduit que $m_{geo}(-3) = 1$ et $m_{geo}(2) = 3$. Ainsi la matrice A est diagonalisable.

c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$ à l'aide

i) d'une diagonalisation de la matrice A, et
Par calcul direct, on a

$$E_{-3} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), \qquad E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a $D := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ces matrices sont inversibles, en particulier, on a $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} A^n =& PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-3)^{n+1} & -2(-3)^n & -2(-3)^n \\ -2^n & 2^n & 2^n \\ 6\cdot 2^n & -2^{n+2} & -5\cdot 2^n \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -(-3)^{n+1} - 2^{n+1} & -2(-3)^n + 2^{n+1} & -2(-3)^n + 2^{n+1} \\ (-3)^{n+1} + 3\cdot 2^n & 2(-3)^{n+1} - 2^n & 2(-3)^n - 2^{n+1} \\ -2(-3)^{n+1} - 3\cdot 2^{n+1} & -4(-3)^n + 2^{n+2} & -4(-3)^n + 5\cdot 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ii) du reste de la division euclidienne de X^n par $\chi_A(X)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
(hors programme) On effectue la division euclidienne de X^n par $\chi_A(X)$. Soit $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ l'unique couple de polynômes vérifiant tel que $X^n = \chi_A(X)Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < 3$. Le Théorème de Cayley–Hamilton, implique que $A^n = \chi_A(A)Q(A) + R(A) = R(A)$. Donc, il suffit de déterminer le polynôme R. Notons $R(X) = aX^2 + bX + c$. Comme -2 est racine simple de χ_A et 2 racine double, il paraît judicieur d'évaluer R en -3, en 2 et R' en 2. Comme $\chi_A(X) = (X+3)(X-2)^2$, cela donne

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = (-3)^n, \\ 4a + 2b + c = 2^n, \\ 4a + b = n \cdot 2^{n-1}. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &a = \frac{1}{25}((-3)^n + (5n-2)2^{n-1}), \qquad b = \frac{1}{25}(-4(-3)^n + (5n+8)2^{n-1}), \\ &c = \frac{1}{25}(4(-3)^n + (-30n+42)2^{n-1}). \end{aligned}$$

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit inversible.
Comme $\det(A) = a^3 - 4a = a(a+2)(a-2)$, une condition nécessaire et suffisante est $a \neq 0, \pm 2$.

b) Supposons que A est inversible. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.
Le polynôme caractéristique de A vaut $(X-a)(X-(a+2))(X-(a-2))$ et est scindé à racines simples. La matrice A est donc diagonalisable. On calcule :

$$E_{a+2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right), \qquad E_a = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right), \qquad E_{a-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Posons $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & -2\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. On a $D := P^{-1}AP = \begin{pmatrix}a+2 & 0 & 0\\0 & a & 0\\0 & 0 & a-2\end{pmatrix}$. On a alors $A^n = PD^nP^{-1}$ et on déduit, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}(a+2)^n + 2\cdot a^n + (a-2)^n & (a+2)^n - (a-2)^n & (a+2)^n - 2\cdot a^n + (a-2)^n\\ 2(a+2)^n - 2(a-2)^n & 2(a+2)^n + 2(a-2)^n & 2(a+2)^n - 2(a-2)^n\\ (a+2)^n - 2\cdot a^n + (a-2)^n & (a+2)^n - (a-2)^n & (a+2)^n + 2\cdot a^n + (a-2)^n\end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\-3 & 13 & -7\\-5 & 19 & -10\end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A.
Le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A(X) = (X-2)(X-1)^2$, d'où les valeurs propres de A sont 1 et 2.

b) Pour chaque valeur propre λ, déterminer son sous-espace caractéristique $F_\lambda(A)$.
On a $\dim F_1(A) = 2$ et $\dim F_2(A) = 1$. Notons que $(A-I_3)^2 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\-1 & 2 & -1\\-2 & 4 & -2\end{pmatrix}$. le sous-espace caractéristique F_1 est donné par $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$. Pour la valeur propre 2, le sous-espace caractéristique F_2 coïncide avec le sous-espace propre $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right)$.

c) Trigonaliser A.
D'abord, on pose $b_1' = \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ qui forme une base de $F_2 = E_2$. Ensuite, on sélectionne une base de F_1. Comme $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$, par exemple, le vecteur $\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix} \in F_1$

n'appartient pas à E_1. Alors, posons $b_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $b_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. En particulier, avec la matrice $P = \begin{pmatrix} b_1' & b_2' & b_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, on obtient $T := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il reste à déterminer la valeur de x. On peut utiliser l'égalité $PT = AP$ pour trouver $x = -1$.

d) Donner une formule de A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.
Les matrices I_2 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent, donc pour tout pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant la formule de Cramer pour inverser T^n, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n - n & -2^{n+1} + 5n + 2 & 2^n - 3n - 1 \\ -2^n - 2n + 1 & 2^{n+1} + 10n - 1 & -2^n - 6n + 1 \\ -2^{n+1} - 3n + 2 & 2^{n+2} + 15n - 4 & -2^{n+1} - 9n + 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice A a une racine triple, disons λ.
Par calcul direct, on a $\chi_A(X) = (X-1)^3$.

b) Calculer $\operatorname{rang}(A - \lambda I_3)$, et décrire la réduction de Dunford–Jordan de A.
Posons $E = \mathbb{R}^3$. Comme $A - I_3$ est nilpotente et commute avec I_3 qui est diagonalisable, la réductiond e Dunford–Jordan de A est $A = B + N$ avec $B = I_3$ et $N = A - I_3$.

Exercice 6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le but de cet exercice est de prouver que la décomposition de Dunford–Jordan $A = B + N$ où B est diagonalisable, N nilpotente et $BN = NB$ est unique.

a) Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $F_\lambda(A)$ est stable par B et par N.

b) Soit f_λ l'endomorphisme de $F_\lambda(A)$ induit par B. Justifier que f_λ est diagonalisable.

c) Montrer que λ est l'unique valeur propre de f_λ. En déduire que $f_\lambda = \lambda \mathrm{Id}_{F_\lambda}$.

d) Supposons que $A = B_1 + N_1 = B_2 + N_2$ avec B_1 et B_2 diagonalisables, N_1 et N_2 nilpotentes, $B_1N_1 = N_1B_1$ et $B_2N_2 = N_2B_2$. Montrer que $B_1 = B_2$ et $N_1 = N_2$.