Entraînement hivernal

Exercice 1 a) Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -6 \\ -3 & -4 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

i) Calculer les valeurs propres de A.

ii) Pour chaque valeur propre λ de A, calculer le rang de la matrice $A - \lambda I_3$.

iii) En déduire que la matrice A est diagonalisable.

iv) Donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$ formée de vecteurs propres.

v) Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D vérifiant $D = P^{-1}AP$.

b) Ensuite, on considère le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{array}{rrrr} x'(t) = & 8x(t)+ & 12y(t)+ & -6z(t) \\ y'(t) = & -3x(t)- & 4y(t)+ & 3z(t) \\ z'(t) = & 3x(t)+ & 6y(t)- & z(t) \end{array}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 2, y(0) = 0, z(0) = 1$.

i) Exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

ii) En déduire la solution du système d'équations différentielles ci-dessus.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} -13 & 10 & 10 \\ 15 & -8 & -10 \\ -30 & 20 & 22 \end{pmatrix}$. Nous allons calculer A^n ($n \in \mathbb{Z}$) de deux manières différentes.

a) Déterminer le rang de la matrice $A - 2I_3$.

b) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

c) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$ à l'aide

i) d'une diagonalisation de la matrice A, et

ii) du reste de la division euclidienne de X^n par $\chi_A(X)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit inversible.

b) Supposons que A est inversible. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A.

b) Pour chaque valeur propre λ, déterminer son sous-espace caractéristique $F_\lambda(A)$.

c) Trigonaliser A.

d) Donner une formule de A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice A a une racine triple, disons λ.

b) Calculer $\operatorname{rang}(A - \lambda I_3)$, et décrire la réduction de Dunford–Jordan de A.

Exercice 6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le but de cet exercice est de prouver que la décomposition de Dunford–Jordan $A = B + N$ où B est diagonalisable, N nilpotente et $BN = NB$ est unique.

a) Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $F_\lambda(A)$ est stable par B et par N.

b) Soit f_λ l'endomorphisme de $F_\lambda(A)$ induit par B. Justifier que f_λ est diagonalisable.

c) Montrer que λ est l'unique valeur propre de f_λ. En déduire que $f_\lambda = \lambda \mathrm{Id}_{F_\lambda}$.

d) Supposons que $A = B_1 + N_1 = B_2 + N_2$ avec B_1 et B_2 diagonalisables, N_1 et N_2 nilpotentes, $B_1N_1 = N_1B_1$ et $B_2N_2 = N_2B_2$. Montrer que $B_1 = B_2$ et $N_1 = N_2$.