Devoir maison

Exercice 1 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer que A n'est pas diagonalisable comme matrice de $M_3(\mathbb{R})$.

b) Démontrer que A est diagonalisable comme matrice de $M_3(\mathbb{C})$ puis déterminer une matrice $P \in M_3(\mathbb{C})$ inversible et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{C})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2 Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2+2i & 1+i \\ -1-i & i \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

c) Déterminer une base propre de A.

Exercice 3 Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si $u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on note $\Phi(u)$ la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $v_0 = u_0$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

a) Vérifier que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

b) vérifier que Φ est un endomorphisme de E.

c) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Exercice 4 Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. On fixe deux éléments $a, b \in K$ tels que $b \neq 0$. Soit $A = (A_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $A_{i,i} = a$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $A_{i,j} = b$ si $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

a) Montrer que $a - b$ est une valeur propre de A.

b) Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre $a - b$.

c) Déterminer toutes les valeurs propres de A (on pourra vérifier que le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1 est vecteur propre de A).

d) Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la matrice A est inversible.

e) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

f) Déterminer une matrice de passage P permettant de diagonaliser A.

g) Déterminer le déterminant de A.

h) Si $b = 0$, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ de trace nulle. On pose $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Pour tout $M \in E$, on pose $f(M) = MB - BM$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que la famille
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$
est une base de E.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Déterminer les valeurs propres de f.
5. Déterminer les sous-espaces propres de f.
6. Est-ce que f est diagonalisable ?