Algèbre 3

Benjamin Schraen

1 Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans ce cours, la lettre K désigne l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ou l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1.1 Espaces vectoriels

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres réels. Cet ensemble est muni de deux opérations

— l'addition : si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on pose $v + w = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$;

— la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$: si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on pose $\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$.

Ces opérations ont les propriétés suivantes. Notons, pour des raisons de référence dans la suite, $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$ et $0_E = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On vérifie alors les propriétés suivantes.

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (v, w) & \longmapsto & v + w \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda \cdot v. \end{array}$$

Ces deux lois doivent vérifier les propriétés suivantes

a) La loi + est *associative* :

$$\forall u, v, w \in E, \quad (u + v) + w = u + (v + w).$$

b) La loi + est *commutative* :

$$\forall v, w \in E, \quad v + w = w + v.$$

c) Il existe un unique élément neutre $0_E \in E$ pour la loi $+$:

$$\forall v \in E, \quad v + 0_E = 0_E + v = v.$$

d) Tout élément $v \in E$ possède pour symétrique $-v = (-1) \cdot v \in E$:

$$v + (-v) = (-v) + v = 0_E.$$

e) La loi $\cdot$ est distributive par rapport aux lois $+$ de E et K :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in K,\ \forall v, w \in E, \quad & \lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w) \\ \forall \lambda, \mu \in K,\ \forall v E, \quad & (\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v). \end{aligned}$$

f) La loi $\cdot$ est compatible à la multiplication dans K :

$$\forall \lambda, \mu \in K,\ \forall v \in E, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v, \quad 1 \cdot v = v.$$

Voici un autre exemple. Rappelons que K désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1. *Soient $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ deux entiers. Une* matrice *de taille $m \times n$ à coefficients dans K est un tableau rectangulaire A ayant m lignes et n colonnes contenant des éléments de A. On note $a_{i,j}$ ses coefficients et on les indexe de la façon suivante*

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes. On définit les opérations suivantes :

— $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, alors $C = A + B$ où $C = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

— $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, $\lambda \in K$, alors $\lambda \cdot A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Alors en posant $E = \mathcal{M}_{m,n}(K)$, les propriétés a) à f) sont vérifiées.

Si $m = n$, une matrice de $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_{m,n}(K)$ est appelée *matrice carrée* de taille n.

Définition 1.2. *On appelle K-*espace vectoriel*, ou simplement* espace vectoriel*, un ensemble E muni de deux opérations*

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longmapsto & E \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda \cdot v \end{array}$$

vérifiant les propriétés a) à f).

Les éléments de l'ensemble E sont appelés *vecteurs* et les éléments du corps K sont appelés *scalaires*. Il faut bien prendre garde au fait que les lois $+$ et $\cdot$ sont définies sur des ensembles différents. La loi $+$ part de deux vecteurs et produit un vecteur alors que la loi $\cdot$ part d'un scalaire et d'un vecteur et produit un vecteur. Si λ est un scalaire et v un vecteur, il faut imaginer le vecteur $\lambda \cdot v$ comme étant le vecteur v dilaté au moyen du coefficient λ.

Remarque 1.3. Soit E un K-espace vectoriel. Si $v \in E$, on a $0 \cdot v + 0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v$. On en déduit $0 \cdot v = 0_E$ pour tout $v \in E$.

Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille d'éléments de E, on appelle *combinaison linéaire* de $v_1, \ldots, v_n$ un élément de la forme $\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$ pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.

1.2 Bases et coordonnées

Soit E un espace vectoriel.

Définition 1.4. *On appelle* famille génératrice *de E une famille finie de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ telle que tout vecteur de E est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_n$. On dit qu'un espace vectoriel est de* dimension finie *s'il possède une famille génératrice finie.*

Exemple 1.5. Si $E = K^n$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, notons e_i l'élément $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où 1 apparaît sur la i-ième ligne. Tout élément de E peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n \cdot e_n$$

donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de K^n.

Dans l'exemple précédent, on a envie de dire que K^n est en fait de dimension n. Pour définir correctement la notion de dimension, il est nécessaire d'introduire les notions de familles libres et de bases.

Définition 1.6. *Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille finie d'éléments de E. On dit que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est* libre *si pour tout n-uplet de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$, on a*

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Autrement dit, la seule combinaison linéaire nulle des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ est la combinaison dont les coefficients sont nuls.

Exemple 1.7. Si $E = K^n$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. En effet, supposons que $\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n = 0_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Définition 1.8. *Une* base *de E est une famille finie d'éléments de E qui est à la fois libre et génératrice.*

Exemple 1.9. Dans $\mathbb{R}^n$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base appelée *base canonique.*

Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E et soit $v \in E$. Comme la famille $\mathcal{B}$ est génératrice, il existe des scalaires $x_1, \dots, x_n$ tels que $v = x_1 \cdot v_1 + \cdots + x_n \cdot v_n$. Comme de plus la famille $\mathcal{B}$ est libre, les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont uniquement déterminés par v. On les appelle les *coordonnées* de v dans la base $\mathcal{B}$.

Il peut être commode, du point de vue du calcul matriciel, de noter les coordonnées d'un vecteur sous forme de vecteur colonne. Si E est un espace vectoriel, $\mathcal{B}$ une base de E et $v \in E$, on note

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

le vecteur colonne des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple 1.10. Notons $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n. Si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$v = x_1 \cdot e_1 + \cdots x_n \cdot e_n$$

donc les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées du vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}_{\text{can}}$. Ainsi on a

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Mais attention, il existe bien d'autres bases dans $\mathbb{R}^n$ et cette égalité ne vaut que pour la base canonique !

Exemple 1.11. Soit $E = K^2$. Posons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. La famille (u, v) est libre. En effet, si $x \cdot u + y \cdot v = 0_{K^2}$, alors

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y & = 0 \\ x-y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0. \end{cases}$$

De plus si $x, y \in K$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \cdot u + \frac{x-y}{2} \cdot v.$$

Ainsi la famille (u, v) est génératrice. C'est donc une base de K^2. De plus, les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base (u, v) sont x, y. On a donc

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.12. Soit $m, n \geqslant 1$ deux entiers. On note $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ la matrice dont toutes les entrées sont nulles, sauf l'entrée sur la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1. Par exemple, si $m = 2$ et $n = 3$,

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est une base de $\mathcal{M}_{2,3}(K)$ et on a

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = a_{1,1} \cdot E_{1,1} + a_{1,2} \cdot E_{1,2} + \cdots + a_{2,3} \cdot E_{2,3}.$$

Ainsi $\left[\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{2,3} \end{pmatrix}.$

Exemple 1.13. Soit $K[X]$ l'ensemble des polynômes en une variable à coefficients dans K. Si $n \geqslant 0$, on note $K_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. La famille $\mathcal{B} = (1, X, X^2 \ldots, X^n)$ est une base de $K_n[X]$. De plus on a

$$[a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.14. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.*

1) *Il existe au moins une base de E.*
2) *Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.*
3) *On peut toujours compléter une famille libre de E en une base.*
4) *On peut toujours extraire une base d'une famille génératrice de E.*

Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie. La longueur d'une base de E est appelée *dimension* de E. On la note $\dim_K E$ (ou encore $\dim E$ lorsque le corps des scalaires est défini sans ambiguïté).

Exemple 1.15. L'exemple 1.9 montre que la famille des vecteurs élémentaires $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de K^n, on en conclut que $\dim_K K^n = n$.

Exemple 1.16. Dans l'exemple 1.12, on a vu que la famille $(E_{1,1}, \ldots, E_{2,3})$ est une base d e$\mathcal{M}_{2,3}(K)$. Ainsi $\dim_K \mathcal{M}_{2,3}(K) = 6$. Plus généralement, on a $\dim_K \mathcal{M}_{m,n}(K) = mn$.

Exemple 1.17. Dans l'exemple 1.13, on a vu que la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base du K-espace vectoriel $K_n[X]$. On en conclut que $\dim_K K_n[X] = n + 1$.

1.3 Produit matriciel, changement de base

Rappelons que l'on peut multiplier les matrices.

Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, on définit le *produit* de A avec B par

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$$

où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$.

Proposition 1.18. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(K)$, on a*

- $A(BC) = (AB)C$;
- $A(B + C) = (AB) + (AC)$;
- $(A + B)C = (AC) + (BC)$;
- *si $\lambda \in K$, on a $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.*

Si $n \geqslant 1$, on note I_n la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ définie par $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{i,j} = 1$ si $i = j$. On l'appelle la *matrice identité*. On vérifie que $AI_n = A = I_m A$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Remarque 1.19. Le produit matriciel n'est pas commutatif. Voici un exemple dans $\mathcal{M}_2(K)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.20. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite* inversible *s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $AB = BA = I_n$. Si elle existe, la matrice B est unique et est appelée* inverse de A. *On la note alors A^{-1}.*

Si A et B sont inversibles alors AB est aussi inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice carrée de taille n dont la j-ème colonne est donnée par les coordonnées du j-ème vecteur de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_n)$, et que

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant n,\ v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} v_i,$$

alors

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \begin{pmatrix} [v'_1]_{\mathcal{B}} & \cdots & [v'_n]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.21. *Si $v \in E$, on a alors*

$$[v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}'}.$$

Démonstration. En effet, supposons que $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j v'_j$.

Comme $v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} v_i$, on en conclut

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x'_j \right) v_i.$$

Comme $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E, on a bien

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x'_j$$

c'est-à-dire $[v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}'}$. □

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E, on a alors

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}''}.$$

Remarque 1.22. Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on a $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = I_n$. On a donc, en général

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = I_n.$$

Ainsi la matrice $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ est inversible et $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$.

1.4 Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels.

Définition 1.23. *Une* application linéaire *de E dans F est une application f de E dans F telle que*

— $\forall v, w,\ f(v+w) = f(v) + f(w)$;

— $\forall \lambda \in K,\ \forall v \in E,\ f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$.

Si E et F sont deux espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Lorsque $E = F$, on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. Un élément de $\mathcal{L}(E)$ est appelé *endomorphisme* de E.

Exemple 1.24. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+2x \end{pmatrix}$ est linéaire.

Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F, on note $f+g$ l'application de E dans F définie par

$$\forall v \in E,\ (f+g)(v) = f(v) + g(v).$$

Il s'agit d'une application linéaire de E dans F. De même si $\lambda \in K$, on note $\lambda \cdot f$ l'application de E dans F définie par

$$\forall v \in E,\ (\lambda \cdot f)(v) = \lambda \cdot f(v).$$

Il s'agit encore d'une application linéaire de E dans F. Muni des opérations $+$ et $\cdot$ définies ci-dessus, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. On fixe $\mathcal{B}_E = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (w_1, \ldots, w_m)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m}$ les coordonnées de $f(v_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$. Autrement dit

$$f(v_j) = a_{1,j} w_1 + \cdots + a_{m,j} w_m \quad \text{ou encore} \quad [f(v_j)] = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}.$$

La matrice de taille $m \times n$ de termes $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ est appelée *matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$*. On la note $\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(f)$. Si $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) = \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)}(f)$.

Remarque 1.25. D'autres notations sont parfois utilisées pour la matrice $\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(f)$. On peut la noter $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \to \mathcal{B}_F}(f)$ ou encore $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f)$. La dernière notation est particulièrement bien adaptée aux formules de changement de base et de composition.

Proposition 1.26. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E et soit $\mathcal{B}_F$ une base de F. Alors, pour tout $v \in E$, on a*

$$[f(v)]_{\mathcal{B}_F} = \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(f)[v]_{\mathcal{B}_E}.$$

Remarque 1.27. On note Id_E l'endomorphisme *identité* de l'espace vectoriel E, c'est l'application linéaire de E dans E définie simplement par $\mathrm{Id}_E(v) = v$ pour tout $v \in E$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, on vérifie facilement que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$. Il faut prendre garde au fait que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E (potentiellement différentes), alors

$$\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} (= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)).$$

1.5 Composition des applications linéaires

Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, l'application composée $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Proposition 1.28. *Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. Alors si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G)}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)}(g)\, \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(f).$$

Ou encore, en notations alternatives

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_F}(g)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f).$$

Définition 1.29. *Une application linéaire f de E dans F est appelée* isomorphisme *si elle est bijective.*

Si f est un isomorphisme de E dans F son application réciproque f^{-1} de F dans E est linéaire et bijective et est donc également un isomorphisme. Rappelons que l'application réciproque f^{-1} d'une application bijective est l'unique application telle que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$. On a alors, de façon équivalente, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Si f est un isomorphisme de E dans F, si $\mathcal{B}_E$ est une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F, on a alors

$$\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(f)\, \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E)}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(\mathrm{Id}_E) = I_n.$$

Ainsi $\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_\mathcal{E}, \mathcal{B}_F)}(f)$ est inversible et son inverse est $\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_\mathcal{F}, \mathcal{B}_E)}(f^{-1})$. La réciproque est vraie également.

Proposition 1.30. *Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E et soit $\mathcal{B}_F$ une base de F. Une application linéaire f de E dans F est inversible si et seulement si $\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(f)$ est inversible. Dans ce cas*

$$\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(f)^{-1} = \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E)}(f^{-1}).$$

Proposition 1.31. *Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a*

$$\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)}(f) = P^{-1}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}'_F} \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(f) P_{\mathcal{B}_E \leftarrow \mathcal{B}'_E}.$$

En particulier, si $E = F$, $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{B}'_E = \mathcal{B}'_F$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E}(f) = P^{-1}_{\mathcal{B}_E \leftarrow \mathcal{B}'_E} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) P_{\mathcal{B}_E \leftarrow \mathcal{B}'_E}.$$

Démonstration. On peut en effet écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)}(f) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_F \leftarrow \mathcal{B}'_E}(\mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_F \leftarrow \mathcal{B}_F}(\mathrm{Id}_F) \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f) \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E \leftarrow \mathcal{B}'_E}(\mathrm{Id}_E) \\
&= P_{\mathcal{B}'_F \leftarrow \mathcal{B}_F} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f) P_{\mathcal{B}_E \leftarrow \mathcal{B}'_E} \\
&= P^{-1}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}'_F} \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(f) P_{\mathcal{B}_E \leftarrow \mathcal{B}'_E}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les résultats de la proposition 1.28 et des remarques 1.27 et 1.22. □

1.6 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.32. *Soit E un K-espace vectoriel. Un sous-K-espace vectoriel de E (ou simplement sous-espace vectoriel lorsque K est sous-entendu) est une partie F de E vérifiant*

(i) $0_E \in F$;

(ii) pour tous v et w dans F, on a $v + w \in F$;

(iii) pour tout v dans F et tout λ dans K, on a $\lambda v \in F$.

Exemple 1.33. Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble des éléments $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ vérifiant la relation $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$ est un sous-espace vectoriel. Il s'agit d'un exemple de *sous-espace vectoriel défini par une équation.*

Exemple 1.34. Dans $\mathbb{R}^3$ posons $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Alors l'ensemble

$$\{\lambda v + \mu w \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu \\ 2\lambda + 7\mu \\ 3\lambda + 3\mu \end{pmatrix} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit d'un exemple de sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, ici les vecteurs v et w.

Plus généralement si $v_1, \ldots, v_n \in E$, on note $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$. C'est un sous-espace vectoriel de E appelé *sous-espace engendré* par $v_1, \ldots, v_n$.

Définition 1.35. *Si E et F sont deux espaces vectoriels et si f est une application linéaire de E dans F, on note* $\mathrm{Im}\, f$ *l'image $f(E)$ de f et* $\mathrm{Ker}\, f$ *le* noyau *de f, c'est-à-dire l'ensemble $f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.*

On vérifiera à titre d'exercice que $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E et que $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 1.36. *Si f est une application linéaire entre deux espaces vectoriels, alors f est injective si et seulement si* $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.

Démonstration. Si f est injective, alors $\mathrm{Ker}\, f$ est réduit à $\{0_E\}$. Réciproquement supposons que $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$. Si x et y sont deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$, alors $f(x) - f(y) = 0_F$. Par linéarité de f, on a alors $f(x - y) = 0_F$ et donc $x - y \in \mathrm{Ker}\, f$. Ainsi on doit avoir $x - y = 0_E$, c'est-à-dire $x = y$. On a prouvé que l'application f est injective. $\square$

La dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}\, f$ est appelé le *rang* de f et est notée $\mathrm{rg}\, f$. Ainsi on a, par définition, $\mathrm{rg}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f$.

Théorème 1.37 (Théorème du rang)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un espace vectoriel. Si f est une application linéaire de E dans F, alors* $\mathrm{Im}\, f$ *est un sous-espace vectoriel de dimension finie de F et on a*

$$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, f.$$

Exemple 1.38. Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

Déterminons son noyau. Un élément $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est dans le noyau de f si et seulement si il est solution du système d'équations linéaires homogène

$$\begin{cases} x + y & = 0 \\ 2x + y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y & = 0 \\ x & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0. \end{cases}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}\, f = 0$ et l'application f est injective. Le théorème du rang (théorème 1.37) nous donne alors $\mathrm{rg}\, f = 2$.

1.7 Sommes de sous-espaces vectoriels

On peut effectuer des opérations sur les sous-espaces vectoriels afin d'en produire de nouveaux.

Si E est un espace vectoriel et si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels, l'intersection $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble

$$F_1 + F_2 = \{v + w \mid (v, w) \in F_1 \times F_2\}$$

est un sous-espace vectoriel de E appelé *somme* des sous-espaces F_1 et F_2. Plus généralement, si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels, la partie

$$F_1 + \cdots + F_n = \{v_1 + \cdots + v_n \mid (v_1, \ldots, v_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\}$$

est un sous-espace vectoriel de E appelé *somme* de la famille de sous-espaces $(F_1, \ldots, F_n)$.

Soit E un K-espace vectoriel, ainsi que F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Par définition, tout élément de $F_1 + F_2$ s'écrit sous la forme $v + w$ avec $v \in F_1$ et $w \in F_2$. Cette écriture n'est pas toujours unique. Considérons par exemple le cas de $E = \mathbb{R}^2$ avec $F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$. Alors on peut écrire

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Cependant lorsque cette décomposition est unique, on dit que les sous-espaces F_1 et F_2 sont en *somme directe*. Plus généralement, on peut définir la notion de somme directe pour une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Définition 1.39. *Soit E un espace vectoriel. Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E, on dit qu'ils sont en* somme directe *si tout élément $v \in F_1 + \cdots + F_n$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = v_1 + \cdots + v_n$ avec $v_i \in F_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Lorsque tel est le cas, on note également $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ le sous-espace vectoriel $F_1 + \cdots + F_n$.*

Pour vérifier que des sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on peut utiliser le critère suivant.

Proposition 1.40. *Les sous-espaces $F_1 + \cdots + F_n$ sont en somme directe si et seulement si pour tout $(v_1, \ldots, v_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$, l'égalité $v_1 + \cdots + v_n = 0_E$ implique $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0_E$.*

Démonstration. Le sens $\Rightarrow$ est immédiat, il s'agit juste d'appliquer la définition d'une somme directe à la décomposition de l'élément 0. Montrons que si l'égalité $v_1 + \cdots + v_n = 0_E$ implique $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0$ pour tout $(v_1, \ldots, v_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$, alors les sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe. Il faut donc prouver que si $(v_1, \ldots, v_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ et si $(w_1, \ldots, w_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ vérifient

$$v_1 + \cdots + v_n = w_1 + \cdots + w_n, \tag{1}$$

alors $v_1 = w_1, \ldots, v_n = w_n$. Pour cela, réécrivons l'égalité (1) sous la forme

$$(v_1 - w_1) + (v_2 - w_2) + \cdots + (v_n - w_n) = 0_E.$$

L'hypothèse implique alors $v_1 - w_1 = \cdots = v_n - w_n = 0_E$, c'est-à-dire $v_1 = w_1, \ldots, v_n = w_n$. □

Le cas de deux sous-espaces vectoriels est particulier.

Proposition 1.41. *Soit E un K-espace vectoriels et soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que F_1 et F_2 sont en somme directe. Soit $v \in F_1 \cap F_2$. Alors $0_E = v - v = 0_E - 0_E$. Comme F_1 et F_2 sont en somme directe, une telle décomposition est unique, ainsi $v = 0_E$ et donc $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Réciproquement supposons $F_1 \cap F_2 = 0$. Soit $(v_1, v_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $v_1 + v_2 = 0_E$. On a alors $v_1 = -v_2 \in F_2$, donc $v_1 \in F_1 \cap F_2$ et donc $v_1 = 0_E$. On en déduit $v_2 = 0_E$. Ainsi la proposition 1.40 implique que F_1 et F_2 sont en somme directe. □

Remarque 1.42. Attention, la proposition 1.41 ne se généralise pas verbatim au cas deux n sous-espaces vectoriels avec $n \geqslant 3$. Considérons par exemple le cas de $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$, $F_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $F_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$. On vérifie que $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_1 \cap F_3 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ (en particulier $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$). Pourtant ces trois sous-espaces ne sont pas en somme directe puisque

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = 0_{\mathbb{R}^2} + 0_{\mathbb{R}^2} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Proposition 1.43. *Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si F et G sont de dimension finie, alors $F + G$ et $F \cap G$ sont de dimension finie et on a*

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim F - \dim F \cap G.$$

Proposition 1.44. *Soit $(F_1, \ldots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Si ces sous-espaces sont en somme directe, alors pour toute base $\mathcal{B}_1$ de F_1, $\mathcal{B}_2$ de F_2,...,$\mathcal{B}_n$ de F_n, la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$,...,$\mathcal{B}_n$ est une famille libre de E. Si de plus $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E$, alors $\mathcal{B}$ est une base de E.*

Proposition 1.45. *Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Ces sous-espaces sont en somme directe si et seulement si*

$$\dim(F_1 + \cdots + F_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i.$$

1.8 Outils pratiques

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ une matrice. Le *système linéaire homogène* associé est le système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n & = 0. \end{cases}$$

La méthode du pivot permet de ramener ce système à un système de la forme

$$\begin{cases} x_{\sigma(1)} + b_{1,2}x_{\sigma(2)} + \cdots + b_{1,n}x_{\sigma(n)} & = 0 \\ 0 + x_{\sigma(2)} + b_{2,3}x_{\sigma(3)} + \cdots + b_{2,n}x_{\sigma(n)} & = 0 \\ 0 + 0 + x_{\sigma(3)} + \cdots & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 + \cdots + 0 + x_{\sigma(r)} + \cdots + b_{r,n}x_{\sigma(n)} & = 0 \end{cases} \tag{2}$$

où $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$ est une permutation des variables $x_1, \ldots, x_n$ et r est un entier $0 \leqslant r \leqslant n$. On dit que le système a été mis sous forme *échelonnée*. Soit $0 \leqslant r \leqslant n$ l'entier tel que les variables $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}$ apparaissent sur la diagonale du système échelonné. Les variables $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}$ sont appelées les *variables principales* et $x_{\sigma(r+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$ les *variables libres*. On peut alors extraire les informations suivantes du système mis sous forme échelonnée :

— le range de la matrice A est r, le nombre de variables principales ;

— on obtient une base du noyau de A en considérant $(X_1, \ldots, X_{n-r})$ où X_i est l'unique solution du système telle que $x_{\sigma(r+i)} = 1$ et $x_{\sigma(r+j)} = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-r$ et $j \neq i$;

— on obtient une base de l'image de A en prenant

$$(Ae_{\sigma(1)}, \ldots, Ae_{\sigma(r)})$$

(on rappelle que $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

Ces techniques peuvent s'appliquer au calcul du rang, du noyau et de l'image d'une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(R, F)$. On fixe $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(K)$. On a alors

— $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$, où $\mathrm{rg}(A)$ peut se déterminer par la méthode du pivot comme ci-dessus ;

— soit $(X_1, \ldots, X_{n-r})$ une base de $\mathrm{Ker}(A)$, on obtient une base de $\mathrm{Ker}(f)$ en prenant $(v_1, \ldots, v_{n-r})$ telle que $[v_i]_{\mathcal{B}_E} = X_i$;

— soit $(Y_1, \ldots, Y_r)$ une base de $\mathrm{Im}(A)$, on obtient une base de $\mathrm{Ker}(f)$ en prenant $(v_1, \ldots, v_r)$ telle que $[v_i]_{\mathcal{B}_F} = Y_i$.

2 Le groupe symétrique

2.1 Définition

Soit X un ensemble. Une *permutation* de X est une application bijective $f : X \to X$. L'ensemble des permutations de X est noté $\mathfrak{S}(X)$. Comme la composition de deux applications bijectives est encore bijective, si f et g sont deux permutations de X, leur composée $f \circ g$ est encore une permutation de X. On a donc définit une opération sur l'ensemble $\mathfrak{S}(X)$: l'opération de *composition* qui prend deux éléments f et g de $\mathfrak{S}(X)$ et en fournit un troisième $f \circ g$.

Nous nous intéresserons désormais uniquement au cas où l'ensemble X est l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ des entiers de 1 à n pour un entier $n \geqslant 1$.

Définition 2.1. *On appelle* groupe symétrique *et on note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.*

Une façon standard de décrire une permutation σ est de l'écrire sous la forme d'un tableau à deux lignes, la première ligne étant la liste $1, 2, \ldots, n$ et la deuxième la liste $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$. Voici un exemple si $n = 4$. La permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

est la permutation

$$\begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 3 \end{cases}$$

Théorème 2.2. *Soit $n \geqslant 1$ un entier. L'ensemble $\mathfrak{S}_n$ est fini de cardinal $n!$.*

Démonstration. Il faut compter combien de permutations de l'ensemble fini $\{1, \ldots, n\}$ sont possibles. Se donner une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ revient à se donner n entiers $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ deux à deux distincts et compris entre 1 et n. Il y a donc n choix possibles pour $\sigma(1)$. Une fois $\sigma(1)$ choisi, il n'y a plus que $n - 1$ choix pour $\sigma(2)$, puis $n - 2$ choix pour $\sigma(3)$ etc. et une unique possibilité pour $\sigma(n)$. Au final, il y a donc $n(n-1)(n-2) \cdots 1$ choix possibles de permutations de $\{1, \ldots, n\}$. $\square$

2.2 Exemples d'éléments

Si $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on note (i, j) l'unique permutation de $\{1, \ldots, n\}$ qui échange i et j et fixe tous les autres éléments. Une telle permutation s'appelle une *transposition*.

Si $2 \leqslant k \leqslant n$ et si $a_1, \ldots, a_k$ sont des éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$, on note $(a_1, \ldots, a_k)$ la permutation σ définie par

$$\begin{aligned} \sigma(a_1) &= a_2 \\ \sigma(a_2) &= a_3 \\ &\vdots \\ \sigma(a_k) &= a_1 \\ \sigma(x) &= x \text{ si } x \notin \{a_1, \ldots, a_k\}. \end{aligned}$$

Une telle permutation est appelée un *k-cycle*.

Remarque 2.3. Les 2-cycles sont exactement les transpositions.

Exemple 2.4.

$$(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (1,3,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.3 Structure de groupe

La loi de composition $\circ$ de $\mathfrak{S}_n$ possède une propriété importante : elle est *associative*. Ce la signifie que, pour $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ dans $\mathfrak{S}_n$, on a

$$\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3.$$

Démontrons-le.

Proposition 2.5. *La loi de composition de $\mathfrak{S}_n$ est associative.*

Démonstration. Rappelons que par définition, la permutation $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est la permutation définie par $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(x) = \sigma_1(\sigma_2(x))$. Le principe de la démonstration est donc de calculer, pour tout $x \in \{1, \ldots, n\}$, les éléments $(\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3))(x)$ et $((\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3)(x)$ et de vérifier qu'ils sont égaux. Commençons par

$$(\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3))(x) = \sigma_1((\sigma_2 \circ \sigma_3)(x)) = \sigma_1(\sigma_2(\sigma_3(x))).$$

Et finissons par

$$((\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3)(x) = (\sigma_1 \circ \sigma_2)(\sigma_3(x)) = \sigma_1(\sigma_2(\sigma_3(x))).$$

On a donc $(\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3))(x) = ((\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3)(x)$ pour tout $x \in \{1, \ldots, n\}$, ce qui signifie que $\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$. $\square$

L'application identité $\mathrm{Id}_{\{1,\ldots,n\}}$ (que nous noterons simplement Id par la suite) est une permutation de X et vérifie $\sigma \circ \mathrm{Id} = \sigma = \mathrm{Id}_\circ \sigma$. On dit que c'est un *élément neutre* pour la loi $\circ$.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, l'application réciproque σ^{-1} est un autre élément de $\mathfrak{S}_n$ qui vérifie $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \mathrm{Id}$.

Ces observations peuvent se résumer en disant que la paire $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un *groupe*.

Définition 2.6. *Un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ est appelé un* groupe *si*

(i) la loi $*$ est associative : $a * (b * c) = (a * b) * c$ pour tous a, b, c dans G ;

(ii) la loi x possède un élément neutre $e \in G$: $e * a = a * e = a$ pour tout $a \in G$;

(iii) tout élément a de G possède un symétrique a^{-1} pour $*$: $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Exemple 2.7. La paire $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe. Si E est un espace vectoriel, la paire $(E, +)$ possède également une structure de groupe.

Ainsi tout élément possède un inverse et $(\mathfrak{S}(X), \circ)$ est un groupe.

Exemple 2.8. Considérons les éléments de $\mathfrak{S}_3$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et calculons $\sigma \circ \sigma'$. On a $(\sigma \circ \sigma')(1) = \sigma(2) = 3$ et $(\sigma \circ \sigma')(2) = \sigma(1) = 2$. Comme $\sigma \circ \sigma'$ est une permutation, on a nécessairement $(\sigma \circ \sigma')(3) = 1$:

$$\begin{cases} 1 \overset{\sigma'}{\longmapsto} 2 \overset{\sigma}{\longmapsto} 3 \\ 2 \mapsto 1 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \mapsto 1 \end{cases}$$

et donc $\sigma \circ \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. À titre d'exercice, vérifier que $\sigma'\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque que $\sigma \circ \sigma' \neq \sigma' \circ \sigma$, le groupe S_3 n'est donc pas commutatif ! L'ordre de composition est donc très important.

Lorsqu'un groupe $(G, *)$ vérifie de plus la propriété $a * b = b * a$ pour tous a, b dans G, on dit qu'il est *commutatif*. On vient de voir que le groupe $\mathfrak{S}_3$ (et par extension le groupe $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geqslant 3$) n'est pas commutatif.

Théorème 2.9. *Tout élément de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit comme un produit de transpositions.*

Démonstration. Pour $n \geqslant 2$, soit H_n l'hypothèse de récurrence « toute permutation de $\{1, \ldots, n\}$ est un produit de transpositions ». Alors H_2 est vrai car $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{Id}, (12)\}$. Supposons H_n vrai et démontrons H_{n+1}. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ et posons

$$\sigma' = \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma(n+1) = n+1 \\ (n+1, \sigma(n+1)) \circ \sigma & \text{si } \sigma(n+1) \neq n+1. \end{cases}$$

Alors $\sigma'(n+1) = n+1$. La restriction de σ' à $\{1, \ldots, n\}$ est un élément de $\mathfrak{S}_n$ et s'écrit comme un produit de transpositions par H_n. Comme $\sigma = (n+1, \sigma(n+1)) \circ \sigma'$, on en conclut que σ est un produit de transpositions. $\square$

2.4 Signature

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose

$$\ell(\sigma) = \mathrm{Card}\{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Il s'agit du nombre d'*inversions* de σ. On pose alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$. Le nombre $\varepsilon(\sigma)$ s'appelle la *signature* de σ.

Théorème 2.10. *Pour tous $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, on a $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$. De plus on a $\varepsilon(\tau) = -1$ si τ est une transposition.*

Démonstration. Soient σ et τ deux éléments de $\mathfrak{S}_n$. Il faut vérifier que $\varepsilon(\sigma\circ\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$. On utilise la formule suivante

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{sgn}(\sigma(j) - \sigma(i))$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On a

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma \circ \tau)\varepsilon(\tau) &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{sgn}((\sigma \circ \tau)(j) - (\sigma \circ \tau)(i)) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{sgn}(\tau(j) - \tau(i)) \\
&= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \underbrace{[\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau)(j)) - (\sigma \circ \tau)(i)))\mathrm{sgn}(\tau(j) - \tau(i))]}_{\text{symétrique en } i \text{ et } j} \\
&= \prod_{1 \leqslant \tau(i) < \tau(j) \leqslant n} [\mathrm{sgn}(\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i)))\mathrm{sgn}(\tau(j) - \tau(i))] \\
&= \prod_{1 \leqslant \tau(i) < \tau(j) \leqslant n} \mathrm{sgn}(\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))) \\
&= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{sgn}(\sigma(j) - \sigma(i)) = \varepsilon(\sigma).
\end{aligned}$$

On a donc $\varepsilon(\sigma \circ \tau)\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau)$. Comme $\varepsilon(\tau) \in \{\pm 1\}$, on a $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau)^{-1}$ et donc $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

Il reste à vérifier si τ est une transposition, on a $\varepsilon(\tau) = -1$. Supposons que $\tau = (i,j)$ avec $i < j$ et soient $k < \ell$.

$$\begin{cases}
k, \ell \notin \{i,j\} & \tau(k) = k < \ell = \tau(\ell) \\
k = i,\ \ell \neq j & \tau(k) < \tau(\ell) \text{ si } \ell > j,\ \tau(k) > \tau(\ell) \text{ si } i < \ell < j \\
k \neq i,\ \ell = j & \tau(k) < \tau(\ell) \text{ si } k < i,\ \tau(k) > \tau(\ell) \text{ si } i < k < j \\
(k,\ell) = (i,j) & \tau(k) > \tau(\ell).
\end{cases}$$

Ainsi $\ell(\tau) = 2(j - i - 1) + 1$ et donc $\varepsilon(\tau) = -1$. □

Si $(G, *)$ et $(H, *')$ sont deux groupes. On appelle *morphisme* d'un groupe G vers un groupe H une application $f : G \to H$ telle que $f(g * h) = f(g) *' f(h)$ pour tous g et h dans G.

Exemple 2.11. Considérons le cas où $G = (\mathfrak{S}_n, \circ)$ et $H = (\{\pm 1\}, \times)$. Alors la signature ε est un morphisme du groupe $\mathfrak{S}_n$ vers le groupe $\{\pm 1\}$.

Proposition 2.12. *Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a*

$$\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)^{-1} = \varepsilon(\sigma).$$

Démonstration. On a $\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$. Par ailleurs si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \varepsilon(\mathrm{Id}) = 1.$$

Ainsi $\varepsilon(\sigma)^{-1} = \varepsilon(\sigma^{-1})$. Comme $\varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$, on a $\varepsilon(\sigma)^2 = 1$ et donc $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma)^{-1}$. □

Corollaire 2.13. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La parité du nombre de transposition dans une décomposition de σ en produit de transpositions ne dépend que de σ.*

Démonstration. Soient $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$ et $\sigma = \tau'_1 \circ \cdots \circ \tau'_s$ deux décomposition de σ en produit de transposition. Comme $\varepsilon(\tau_i) = \varepsilon(\tau'_j) = -1$ pour tous i et j, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r = (-1)^s$. On en déduit que r et s ont la même parité. □

3 Déterminants

3.1 Définition

Définition 3.1. *Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle* déterminant *de la matrice A la quantité*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

On utilise également la notation

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Exemple 3.2. Si $n = 2$, on a $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{Id}, (1,2)\}$ et $\varepsilon((1,2)) = -1$. Ainsi

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

On retrouve la notion de déterminant d'une matrice 2×2 vue en première année.

Si $n = 3$, on a $\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{Id}, (12), (23), (13), (123), (132)\}$ et

$$\varepsilon(\mathrm{Id}) = \varepsilon((123)) = \varepsilon((132)) = 1, \quad \varepsilon((12)) = \varepsilon((23)) = \varepsilon((13)) = -1.$$

Ainsi

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$$
$$+ a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}.$$

Voici un cas particulièrement simple de calcul du déterminant. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est *triangulaire supérieure* si $a_{i,j} = 0$ dès que $i > j$. Autrement dit il s'agit d'une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Proposition 3.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Une matrice triangulaire supérieure. Alors*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i} = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}.$$

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Si $\sigma \neq \mathrm{Id}$, il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $\sigma(i) > i$. Comme A est triangulaire supérieure, on a $a_{\sigma(i),i} = 0$. On en déduit que $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = 0$ dès que $\sigma \neq \mathrm{Id}$. On déduit alors la formule de la définition du déterminant. □

On admet également la formule suivante pour le calcul des matrices triangulaires par blocs.

Proposition 3.4. *Si $A_1 \in \mathcal{M}_r(K)$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n-r}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(K)$, alors*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B \\ 0_{n-r,r} & A_2 \end{vmatrix} = \det(A_1)\det(A_2).$$

Définition 3.5. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, on appelle* transposée de A *et on note ${}^tA$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ définie par*

$${}^tA = (a_{j,i})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

On a alors ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Proposition 3.6. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice carrée. On a alors* $\det({}^tA) = \det(A)$.

Démonstration. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(K)$. Notons ${}^tA = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. Par définition de la transposée, on a $b_{i,j} = a_{j,i}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Ainsi, par définition du déterminant, on a donc

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(i),i} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

où la dernière égalité provient du fait que l'application $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_n$. On conclut en remarquant que $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. $\square$

3.2 Opérations sur les lignes et les colonnes d'un déterminant

Théorème 3.7. *1) Si on échange deux colonnes d'indices distincts d'une matrice carrée, on multiplie son déterminant par* -1.

2) Si deux colonnes d'indice distincts d'une matrice carrée A sont identiques, alors $\det A = 0$.

3) On ne change pas le déterminant d'une matrice carrée A en ajoutant à une de ses colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes. Autrement dit si $1 \leqslant i \leqslant n$ et si $(\lambda_j)_{j \neq i}$ est une famille de scalaires, on a

$$\det(C_1 \cdots C_n) = \det(C_1 \cdots C_{i-1}(C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j) \cdots C_n).$$

Comme la transposition échange les lignes et colonnes d'une matrice et que le déterminant ne change pas par transposition, tous les résultats portant sur les colonnes d'un déterminant ont un analogue sur les lignes. On en déduit donc le résultat suivant.

Théorème 3.8. *Soit $n \geqslant 1$.*

1) Si on échange deux lignes d'indices distincts d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on multiplie son déterminant par -1.

2) Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ayant deux lignes d'indices distincts qui sont identiques vérifie $\det A = 0$.

3) On ne change pas le déterminant d'une matrice carrée A en ajoutant à une de ses lignes une combinaison linéaire des autres lignes.

Pour calculer un déterminant, on peut donc commencer par le mettre sous forme triangulaire supérieure (ou inférieure) en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes ou ses colonnes et utiliser la formule permettant de calculer le déterminant d'une matrice triangulaire.

Nous allons à présent démontrer les énoncés ci-dessus.

Proposition 3.9. *L'application* det *est linéaire en chaque colonne. Plus précisément, étant donné $n \geqslant 1$, ainsi que $1 \leqslant j \leqslant n$ et $n-1$ vecteurs colonnes*

$$C_1, \ldots, C_{j-1}, C_{j+1}, \ldots, C_n \in K^n,$$

alors l'application

$$\begin{array}{ccc} K^n & \longrightarrow & K \\ C & \longmapsto & \det(C_1, \ldots, C_{j-1}, \underbrace{C}_{j}, C_{j+1}, \ldots, C_n) \end{array}$$

est linéaire, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\forall C, C' \in K^n,\ \forall \lambda \in K, \quad & \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C + \lambda C', C_{j+1}, \dots, C_n) \\ & = \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C, C_{j+1}, \dots, C_n) + \lambda \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C', C_{j+1}, \dots, C_n).\end{aligned}$$

Démonstration. Fixons $C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, C_n$, $n-1$ vecteurs colonnes de K^n. Soient C et C' deux autres vecteurs colonnes et $\lambda \in K$ un scalaire. Il faut prouver que

$$\begin{aligned}&\det(C_1 C_2 \cdots C_{j-1}(C + \lambda C')C_{j+1} \cdots C_n) \\ &\qquad = \det(C_1 C_2 \cdots C_{j-1} C_j C_{j+1} \cdots C_n) + \lambda \det(C_1 C_2 \cdots C_{j-1} C'_j C_{j+1} \cdots C_n).\end{aligned}$$

Notons donc $(a_{i,k})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coefficients de C_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coefficients de C et $(a'_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coefficients de C'. On a donc

$$\begin{aligned}\det(C_1 C_2 \cdots C_{j-1}(C + \lambda C')C_{j+1} \cdots C_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)(a_{\sigma(j),j} + \lambda a'_{\sigma(j),j} \prod_{k \neq j} a_{\sigma(k),k} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(a_{\sigma(j),j} \prod_{k \neq j} a_{\sigma(k),k} + \lambda a'_{\sigma(j),j} \prod_{k \neq j} a_{\sigma(k),k} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} + \lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a'_{\sigma(j),j} \prod_{k \neq j} a_{\sigma(k),k} \\ &= \det(C_1 C_2 \cdots C_{j-1} C C_{j+1} \cdots C_n) \\ &\quad + \lambda \det(C_1 C_2 \cdots C_{j-1} C' C_{j+1} \cdots C_n). \qquad \square\end{aligned}$$

Proposition 3.10. *1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice de colonnes $C_1, \dots, C_n$. Si $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a*

$$\det(C_{\tau(1)} \dots C_{\tau(n)}) = \varepsilon(\tau) \det(C_1 \dots C_n).$$

2) Si on échange deux colonnes distinctes d'une matrice carrée, on multiplie son déterminant par -1.

3) Si deux colonnes distinctes d'une matrice carrée A sont égales, alors $\det A = 0$.

Démonstration. Prouvons le point 1). Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ et soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une

permutation. Notons B la matrice $(C_{\tau(1)} \dots C_{\tau(n)})$. On a alors

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),\tau(j)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{(\sigma\circ\tau^{-1})(\tau(j)),\tau(j)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau^{-1})\varepsilon(\tau) \prod_{j=1}^{n} a_{(\sigma\circ\tau^{-1})(j),j} \\
&= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma'(j),j} \\
&= \varepsilon(\tau) \det(A)
\end{aligned}$$

L'avant dernière égalité provient du fait que l'application $\sigma \mapsto \sigma\circ\tau^{-1}$ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$. En effet sa réciproque est donnée par $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$.

Prouvons 2). Si $i < j$ et si $\tau = (i, j)$, on a $\varepsilon(\tau) = -1$, on déduit donc de 1) que

$$\det(C_1 \cdots C_j \cdots C_j \cdots C_n) = -\det(C_1 \cdots C_i \cdots C_j \cdots C_n).$$

Prouvons à présent le point 3). Si $i < j$, et si $C_i = C_j$, on a

$$\begin{aligned}
\det(C_1 \cdots C_i \cdots C_j \cdots C_n) &= -\det(C_1 \cdots C_j \cdots C_i \cdots C_n) \\
&= \det(C_1 \cdots C_j \cdots C_i \cdots C_n)
\end{aligned}$$

où la première égalité provient de 1) et la seconde égalité de $C_i = C_j$. On a donc bien

$$\det(A) = -\det(A) = 0. \qquad \square$$

Exemple 3.11.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Corollaire 3.12. *On ne change pas le déterminant d'une matrice carrée A en ajoutant à une de ses colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes. Autrement dit si $1 \leqslant i \leqslant n$ et si $(\lambda_j)_{j\neq i}$ est une famille de scalaires, on a*

$$\det(C_1 \cdots C_n) = \det(C_1 \cdots C_{i-1}(C_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j C_j) \cdots C_n).$$

Démonstration. En effet on a

$$\begin{aligned}
\det(C_1 \cdots C_{i-1}(C_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j C_j) \cdots C_n) &= \det(C_1 \cdots C_i \cdots C_n) \sum_{j\neq i} \lambda_j \det(C_1 \cdots C_{i-1} C_j \cdots C_n) \\
&= \det(C_1 \cdots C_{i-1} C_i \cdots C_n) \qquad \square
\end{aligned}$$

Comme la transposition échange les lignes et colonnes d'une matrice et que le déterminant ne change pas par transposition, tous les résultats portant sur les colonnes d'un déterminant ont un analogue sur les lignes. On en déduit donc le résultat suivant.

Proposition 3.13. *Soit $n \geqslant 1$.*

1) L'application $\det : \mathcal{M}_n(K)$ *est linéaire en chaque ligne.*

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice de lignes $L_1, \ldots, L_n$. Si $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\det \begin{pmatrix} L_{\tau(1)} \\ \vdots \\ L_{\tau(n)} \end{pmatrix} = \varepsilon(\tau) \det \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

3) Si on échange deux lignes d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on multiplie son déterminant par -1.

4) Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ayant deux lignes égales vérifie $\det A = 0$.

5) On ne change pas le déterminant d'une matrice carrée A en ajoutant à une de ses lignes une combinaison linéaire des autres lignes.

3.3 Développement d'un déterminant selon une ligne ou une colonne

Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et si i et j sont deux entiers compris entre 1 et n, on note $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Théorème 3.14. *Soit $n \geqslant 1$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*

1) Soit $1 \leqslant i \leqslant n$. On a alors

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j};$$

on dit qu'on a développé $\det A$ *selon la i-ième ligne.*

2) Soit $1 \leqslant j \leqslant n$. On a alors

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j};$$

on dit qu'on a développé $\det A$ *selon la j-ième colonne.*

Démonstration. On prouve la formule de développement selon une colonee. La formule selon une ligne s'en déduit en utilisant le fait que $\det({}^tA) = \det(A)$.

Soit $1 \leqslant j \leqslant n$. La j-ème colonne C_j de la matrice A peut s'écrire $A = a_{1,j}e_1 + \cdots + a_{n,j}e_n$ où $e_1, \ldots, e_n$ désigne les vecteurs colonnes formant la base canonique de K^n. On déduit donc de la proposition 3.9 que

$$\det(A) = a_{1,j} \det(C_1 \ldots C_{j-1} e_1 C_{j+1} \ldots C_n) + \cdots + a_{n,j} \det(C_1 \ldots C_{j-1} e_n C_{j+1} \ldots C_n).$$

Or en appliquant 3.10 1) avec $\tau = (1, 2, \dots, j)$, on obtient, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\begin{aligned}\det(C_1 \dots C_{j-1} e_i C_{j+1} \dots C_n) &= \varepsilon(\tau) \det(e_i C_1 \dots C_{j-1} C_{j+1} \dots C_n) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

La même opération de permutation sur les lignes, en utilisant le cycle $\tau' = (1, 2, \dots, i)$, donne

$$\begin{aligned}\det(C_1 \dots C_{j-1} e_i C_{j+1} \dots C_n) &= \varepsilon(\tau)\varepsilon(\tau') \begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon(\tau)\varepsilon(\tau') \begin{vmatrix} 1 & * \\ 0_{n-1,1} & A_{i,j} \end{vmatrix} = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\tau') \det(A_{i,j}).\end{aligned}$$

Comme τ est un cycle de longueur j et τ' un cycle de longueur i, on a $\varepsilon(\tau) = (-1)^{j-1}$ et $\varepsilon(\tau') = (-1)^{i-1}$ donc $\varepsilon(\tau)\varepsilon(\tau') = (-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$. On en déduit la formule recherchée. □

3.4 Multiplicativité du déterminant

Théorème 3.15. *Soit $n \geqslant 1$ et soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$. On a alors*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Démonstration. Fixons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n(K)$. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de B. Rappelons que l'on note $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de K^n. On a donc, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$C_j = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} e_i.$$

Par définition du produit matriciel, les colonnes de AB sont les vecteurs colonnes $AC_1, \dots, AC_n$. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a donc

$$AC_j = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} A e_i.$$

On peut donc calculer le déterminant $\det(AB)$ en utilisant la linéarité par rapport à chaque colonne (proposition 3.9). On a donc

$$\begin{aligned}
\det(AB) = \det(AC_1, \dots, AC_n) &= \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} b_{i_1,1} Ae_1, AC_2, \dots, AC_n\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} b_{i_1,1} \det(Ae_{i_1}, AC_2, \dots, AC_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} b_{i_1,1} b_{i_2,2} \det(Ae_{i_1}, Ae_{i_2}, C_3, \dots, C_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_1,1} \cdots b_{i_n,n} \det(Ae_{i_1}, \dots, Ae_{i_n}).
\end{aligned}$$

Calculons alors $\det(Ae_{i_1}, \dots, Ae_{i_n})$ pour tout valeur de $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, n\}^n$.

— Si il existe $k < \ell$ tels que $i_k = i_\ell$, alors $\det(1e_{i_1}, \dots, Ae_{i_n}) = 0$ d'après la proposition 3.10 3).

— Sinon il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $(i_1, \dots, i_n) = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ et alors

$$\det(Ae_{i_1}, \dots, Ae_{i_n}) = \varepsilon(\sigma) \det(Ae_1, \dots, Ae_n)$$

d'après la proposition 3.9 1).

On a donc

$$\det(AB) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n}\right) \det(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det(B) \det(Ae_1, \dots, Ae_n).$$

Comme $Ae_1, \dots, Ae_n$ sont les colonnes de la matrice A, on a $\det(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det(A)$ ce qui fournit $\det(AB) = \det(B)\det(A)$. □

Théorème 3.16. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. De plus, si A est inversible, alors*

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

Démonstration. Supposons A inversible. Alors il existe $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $AA^{-1} = I_n$. On en déduit

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

En particulier $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Réciproquement supposons que A n'est pas inversible. Alors $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0_{K^n}\}$. En particulier il existe un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \setminus \{0_{K^n}\}$ tel que $AX = 0_{K^n}$. En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, on en déduit $\sum_{i=1}^{n} x_i C_i = 0_{K^n}$. Ainsi les colonnes de A sont liées et $\det(A) = 0$. □

Corollaire 3.17. *Considérons un système linéaire à n équations et n inconnues*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = y_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n & = y_n \end{cases} \tag{3}$$

et considérons $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(K)$. Si $\det(A) \neq 0$, alors le système (3) possède une et une seule solution. En particulier si $y_1 = \cdots = y_n = 0$, la seule solution du système (3) est $x_1 = x_2 = \cdots = 0$.

Démonstration. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Le système (3) est équivalent à l'équation $AX = Y$. Si $\det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible d'après le théorème 3.16. On en déduit que l'équation $AX = Y$ est équivalente $X = A^{-1}Y$ qui a pour unique solution $A^{-1}Y$. De plus, si $Y = 0_{K^n}$, on voit que $X = 0_{K^n}$. □

3.5 Formule de Cramer

Définition 3.18. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. La* comatrice *de A est la matrice* $\mathrm{Com}(A)$ *de $\mathcal{M}_n(K)$ définie par*

$$\mathrm{Com}(A) = ((-1)^{i+j}\det(A_{i,j}))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

Théorème 3.19. *1) Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on a*

$${}^t\mathrm{Com}(A)A = A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)I_n.$$

2) Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est inversible, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{Com}(A).$$

Démonstration. Prouvons le point 1). Soit $1 \leqslant i \leqslant n$ et soit $1 \leqslant j \leqslant n$. Calculons le coefficient $b_{i,j}$ de la ligne i et de la colonne j de la matrice $B = {}^t\mathrm{Com}(A)A$. Il s'agit de l'élément

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}\det(A_{k,i})a_{k,j}.$$

Si $i = j$, on a, par développement du déterminant de A selon colonne $i = j$,

$$b_{j,j} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}\det(A_{k,j}a_{k,j} = \det(A).$$

Supposons à présent $i \neq j$. Soit C la matrice obtenue en remplaçant la i-ième colonne de A par sa j-ième colonne. En développant le déterminant de C selon sa i-ième colonne, on a donc

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \det(A_{k,i}) a_{k,j} = \det(C).$$

Comme C a deux colonnes égales (sa i-ième et sa j-ième), on a $\det(C) = 0$ et donc $b_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Ainsi la matrice B est la matrice $\det(A) I_n$, ce qui prouve la formule.

Si A est inversible, on a alors $\det(A) \neq 0$, et on déduit facilement de la formule 1) la formule 2). $\square$

Exemple 3.20. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$. Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$