

Corrigé du partiel

Exercice 1 a) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ convient.

b) $\sigma^2 = \text{Id} \Rightarrow \varepsilon(\sigma^2) = \varepsilon(\text{Id}) = 1$ donc $\varepsilon(\sigma)^2 = 1$.

Comme $\varepsilon(\sigma) \in \{1, -1\}$ et que $(-1)^2 = 1$, on a $\varepsilon(\sigma) = 1$.

Exercice 2 (13) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(26)(13) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(36)(26)(13) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

(45)(36)(26)(13) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (56)$.

donc $\sigma = (13)(26)(36)(45)(56)$ Ainsi $\varepsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$.

σ agit sur $\{1, \dots, 6\}$ par $1 \mapsto 3 \mapsto 2 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 1$

donc $\sigma = (1, 3, 2, 6, 4, 5)$ est un 6-cycle.

Exercice 3 a) $\det(M_x) = \begin{vmatrix} x^2 & 0 & x \\ 0 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x^2 & 0 & 1 \\ 0 & x & x \\ 1 & x^2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= x^2 \begin{vmatrix} x^2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = x^2 (x^2 \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix})$$
$$= x^2 (x^2(1-x^2) - 1) = -x^2 (x^4 - x^2 + 1)$$

b) M_x est inversible $(\Leftrightarrow) \det(M_x) \neq 0$

$$(\Leftrightarrow) x^2 (x^4 - x^2 + 1) \neq 0$$

$$(\Leftrightarrow) x \neq 0 \text{ et } x^4 - x^2 + 1 \neq 0.$$

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 1 \stackrel{=}{=} x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 = x^2 + (x^2 - 1)^2$$

$$x^2 + (x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } x^2 = 1$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 1 > 0$.

donc M_x inversible $(\Leftrightarrow) x \neq 0$.

Exercice 4 a) $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -4 & 0 \\ 2 & X-7 & 0 \\ 1 & -2 & X-3 \end{vmatrix} = (X-3) \begin{vmatrix} X-1 & -4 \\ 2 & X-7 \end{vmatrix}$

$$= (X-3)((X-1)(X-7)+8) = (X-3)(X^2-8X+15)$$

$$= X^3 - 11X^2 + 39X + 45.$$

b) $\chi_A(X) = (X-3)(X^2-8X+15) = (X-3)^2(X-5).$

$(\Delta = 64 - 60 = 4, \text{ racines } \frac{8 \pm 2}{2} = 4 \pm 1)$

donc $S_p(A) = \{3, 5\}.$

c) On détermine les sous-espaces propres de A.

$$E_5(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$E_3(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} ((-12 \ 0)) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

On a $\dim E_3(A) + \dim E_5(A) = 2 + 1 = 3$ donc A est diagonalisable.

Une base de vecteurs propres est donnée par

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 5 a) Montrons que la famille B est libre.

Si $aE_1 + bE_2 + cE_3 = 0_3$, on a $\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $a = b = c = 0$. La famille est libre.

Si $M \in V$, ${}^tM = -M$ donc $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix}$ et

$$M = aE_1 + bE_2 + cE_3 \in \text{Vect}(E_1, E_2, E_3).$$

La famille B est donc génératrice de V. C'est donc une base de V et $\dim(V) = 3$.

b) Si $M \in V$, on a $f(M) = AMA$.

$$\text{On a } {}^t f(M) = {}^t(AMA) = {}^t A {}^t M {}^t A = A {}^t M A = A(-M)A = -AMA = -f(M).$$

Donc $f(M) \in V$.

Si $M_1, M_2 \in V$ et $\lambda \in K$, on a

$$\begin{aligned} f(M_1 + \lambda M_2) &= A(M_1 + \lambda M_2)A = AM_1A + \lambda AM_2A \\ &= f(M_1) + \lambda f(M_2) \end{aligned}$$

donc f est linéaire. Ainsi f est un endomorphisme de V .

$$f(E_1) = AE_1A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -3E_1.$$

$$f(E_2) = AE_2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = E_2 + 2E_3$$

$$f(E_3) = AE_3A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = E_3 + 2E_2.$$

$$\text{On a donc } \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c) \chi_f(X) = \chi_{\text{Mat}_B(f)}(X) = \begin{vmatrix} X+3 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & -2 \\ 0 & -2 & X-1 \end{vmatrix} = (X+3)(X^2 - 2X - 1)$$

$$= (X+3)(X^2 - 2X - 3) = (X+3)(X-3)(X+1)$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$\text{On a donc } \text{Sp}(f) = \{-1, 3, -3\}.$$

Ainsi $\text{Card Sp}(f) = \dim V = 3$ donc f est diagonalisable.