

Exercice 1 a) $A^5 = 0_n$ donc $\pi_A(x) \mid x^5$. Ainsi la seule valeur propre de A est 0.

b) $\chi_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ est simplement scindé. A est donc diagonalisable et la décomposition de Dunford-Jordan est $A = A + 0$.

c) $\chi_B(x) = (x-1)(x-1)^2$. Le plus $S_p(B) = \{1, 2\}$ donc $\pi_B(x)$ est divisible par $(x-1)(x-1)$. Donc $\pi_B(x) = (x-1)(x-1)$ ou $(x-1)^2(x-2)$.

$$(B-1)(B-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ donc}$$

$$\pi_B(x) = (x-2)(x-1)^2.$$

Exercice 2 a) $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -2 & -1 \\ -2 & x-3 & -3 \\ 8 & 8 & x+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ 1-x & x-3 & -3 \\ 0 & 8 & x+7 \end{vmatrix}$

$$= (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & x-3 & -3 \\ 0 & 8 & x+7 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & x-5 & -4 \\ 0 & 8 & x+7 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)((x-5)(x+7) + 32) = (x-1)(x^2 + 2x - 3)$$

$$= (x-1)^2(x+3)$$

b) $S_p(A) = \{1, -3\}$

c) $E_{-3}(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -8 & -8 & -4 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E_1(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -8 & -8 & -8 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $m_{\text{alg}}(-3) = 1$, on a $\dim F_3(A) = 1$ et donc $E_3(A) = F_3(A)$

$$= \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

dim $F_1(A) = m_{\text{alg}}(1) = 2$ donc $F_1(A) \neq E_1(A)$ et nécessairement (2)

$$F_1(A) = \text{Ker}((A - I_3)^2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -16 & -16 & -16 \\ 32 & 32 & 32 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

d) A_n n'est pas diagonalisable car

$$m_{\text{alg}}(1) = 2 \neq m_{\text{geo}}(1) = \dim E_1(A) = 1.$$

e) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $F_1(A)$, donc une base car $\dim F_1(A) = 2$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $F_3(A) = E_3(A)$. ~~A~~

On construit une base de $F_1(A)$ en choisissant pour premier vecteur un vecteur de base de $E_1(A)$.

la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ convient.

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de diagonalisation de A .

On a, en posant $P = P_{B_{\text{can}} \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP$ triangulaire supérieure de la forme $T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminons la valeur de α en considérant l'égalité

$AP = PT$. On trouve $\alpha = 1$.

$$A = PTP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

1) On peut écrire $T = D + M$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3)

où $DM = MD$, D diagonale et M nilpotente.

g) On pose $B = PDP^{-1}$, $N = PMP^{-1}$ de sorte que $BN = NB$ avec B diagonalisable et N nilpotente.

Calculons explicitement B et N :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Alors } N = PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et alors } B = A - N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \\ -3 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 a) On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $\chi_A(X) = (X-1)(X-3) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$ donc $\text{Sp}(A) = \{2\}$.

c) Comme $\text{Sp}(A) = \{2\}$ et $A \neq 2I_2$, la matrice n'est pas diagonalisable. Elle est trigonalisable car $\chi_A(X)$ est scindé.

d) On écrit $A = 2I_2 + N$, N est nilpotente car

$$\chi_A(A) = (A - 2I_2)^2 = 0_2 \text{ et } 2I_2 N = N(2I_2).$$

On a donc $A^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} 2^k N^{m-k}$. Comme $N^2 = 0$,

$$\begin{aligned} A^m &= 2^m I_2 + 2^{m-1} m N = \begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix} + 2^{m-1} m \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^m - m2^{m-1} & m2^{m-1} \\ -m2^{m-1} & 2^m + m2^{m-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{e) On a } \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = A^m \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^m - m2^{m-1} \\ -m2^{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } x_m = 2^m - m2^{m-1},$$

Exercice 4 a) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ A est annihilée par $X^2 + 1$ qui est simplement scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc A est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$

b) $X^2 + 1$ annule A donc $\text{Sp } A \subset \{i, -i\}$. Comme A est diagonalisable et non diagonale, $\text{Card}(\text{Sp } A) \geq 2$ et donc $\text{Sp}(A) = \{i, -i\}$.

$$c) E_i(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{-i}(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Donc } A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

$$d) \exp(tA) = P \exp(tD) P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \exp(tA) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ie^{it} & -ie^{-it} \\ e^{it} & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{it} + e^{-it} & ie^{it} - ie^{-it} \\ -ie^{it} + ie^{-it} & e^{it} + e^{-it} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e) $A(\lambda) = \lambda I_2 + A$ et λI_2 commute avec A, de sorte que

$$\exp(tA(\lambda)) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \cos t & -e^{\lambda t} \sin t \\ e^{\lambda t} \sin t & e^{\lambda t} \cos t \end{pmatrix}.$$