

Correction partielle du TD 3

Exercice 1 a) $P(f) = f \circ f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$

$$f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad f \circ f(e_1) = f(f(e_1)) = f\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$P(f)(e_1) = f \circ f(e_1) - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}(e_1) = e_1 - e_1 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad f \circ f(e_2) = f(f(e_2)) = f\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$$

$P(f)(e_2) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Ainsi $P(f)$ annule une base de $\mathbb{R}^2$
donc $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

$$\parallel \\ f \circ f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$$

On a donc $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

b) $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P(A) &= A^2 - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2 \end{aligned}$$

Comme $P(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(P(f))$, on en déduit $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.
On retrouve le résultat du a)

Remarque les calculs sont exactement les mêmes, seule la présentation a changée entre a) et b)

Exercice 2 a) Si $Q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$, $f(Q(x))$ est le reste de la division euclidienne de $XQ(x)$ par $D(x)$, donc

$$\deg f(Q(x)) < \deg D(x) = 4 \text{ et } f(Q(x)) \in \mathbb{R}_3[x]$$

Si $Q_1(x), Q_2(x) \in \mathbb{R}_3[x]$, on a

$$XQ_1(x) = D(x)S_1(x) + f(Q_1(x)) \quad XQ_2(x) = D(x)S_2(x) + f(Q_2(x))$$

avec $\deg f(Q_i(x)) \leq 3$ pour $i = 1, 2$.

$$\text{Ainsi } X(Q_1(x) + \lambda Q_2(x)) = D(x)(S_1(x) + \lambda S_2(x)) + f(Q_1(x)) + \lambda f(Q_2(x)) \text{ et}$$

$\deg(f(Q_1(x)) + \lambda f(Q_2(x))) \leq 3$. le reste de la division euclidienne de $X(Q_1(x) + \lambda Q_2(x))$ est donc

$$f(Q_1(x) + \lambda Q_2(x)) = f(Q_1(x)) + \lambda f(Q_2(x)).$$

Ainsi f est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[x]$ dans $\mathbb{R}_3[x]$

b) $f(1)$ est le reste de la division euclidienne de

X par $D(x)$, On a $X = 0 \cdot D(x) + X$ et $\deg X < 4$ donc

$$f(1) = X.$$

De même $f(x) = x^2$ et $f(x^2) = x^3$

$$\text{Par contre, } X^4 = D(x) + \underbrace{7x^3 - 18x^2 + 20x - 8}_{\deg \leq 3}$$

$$\text{donc } f(x^3) = 7x^3 - 18x^2 + 20x - 8.$$

On a donc, en posant $B = (1, x, x^2, x^3)$,

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

c) Remarquons que $\mathcal{D}(x) = (x-1)^3(x-1)$.

Comme $\deg X(X-1) = 2 < 4$, on a

$$\mathcal{f}(X-1) = X(X-1) \in F$$

De même $\deg X^2(X-1) = 3 < 4$ donc $\mathcal{f}(X^2(X-1)) = X^2(X-1) \in F$.

$$\begin{aligned} X^3(X-1) &= ((X^3-2)^3 + 6X^2-12X+8)(X-1) \\ &= \underbrace{(X-1)^3(X-1)}_{\mathcal{D}(X)} + \underbrace{6X^2(X-1) - 12X(X-1) + 8(X-1)}_{\deg < 4} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \mathcal{f}(X^3(X-1)) = 8(X-1) - 12X(X-1) + 6X^2(X-1) \in F.$$

la famille $((X-1), X(X-1), X^2(X-1))$ engendre F , donc F est stable par $\mathcal{f}$.

d) Vérifions que la famille $B' = ((X-1), X(X-1), X^2(X-1))$ est libre.

Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vérifie $a(X-1) + bX(X-1) + cX^2(X-1) = 0$, on a

$$(X-1)(a + bX + cX^2) = 0 \quad \text{donc} \quad a + bX + cX^2 = 0 \quad \text{et donc}$$

$$a = b = c = 0 \quad \text{car la famille } (1, X, X^2) \text{ est libre.}$$

Comme de plus, B' est une famille génératrice de F , c'est une base de F .

On a déjà calculé $\mathcal{f}(X-1) = X(X-1)$

$$\mathcal{f}(X(X-1)) = X^2(X-1)$$

$$\mathcal{f}(X^2(X-1)) = 8(X-1) - 12X(X-1) + 6X^2(X-1)$$

$$\text{donc } \text{Mat}_{B'}(\mathcal{f}_F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2/

Exercice 4 a) Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$. Soit $v \in V$ vecteur propre de f de valeur propre λ . On a $v \neq 0_V$ et $f(v) = \lambda v$.

$$\text{A l'ab } (f^2 - \text{Id}_E)(v) = 0_{\mathcal{L}(V)}(v) = 0_V$$

$$\begin{aligned} \text{Mais on a aussi } (f^2 - \text{Id}_E)(v) &= f(f(v)) - v = f(\lambda v) - v \\ &= \lambda f(v) - v = \lambda^2 v - v \\ &= (\lambda^2 - 1)v. \end{aligned}$$

Comme $v \neq 0_V$, l'identité $(\lambda^2 - 1)v = 0_V$ implique $\lambda^2 = 1$.

Ainsi $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Donc $\text{Sp}(f) \subset \{1, -1\}$.

$$\begin{aligned} \text{b) Soit } v \in V. \text{ On a } f\left(\frac{v - f(v)}{2}\right) &= \frac{1}{2}(f(v) - f^2(v)) \\ &= \frac{1}{2}(f(v) - v) = -\frac{v - f(v)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{v - f(v)}{2} \in E_{-1}(f)$$

$$\text{On a } f\left(\frac{v + f(v)}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(v) + f^2(v)) = \frac{1}{2}(f(v) + v) = \frac{v + f(v)}{2}$$

$$\text{donc } \frac{v + f(v)}{2} \in E_1(f)$$

$$\text{c) Si } v \in V, \quad v = \frac{1}{2}(v + f(v)) + \frac{1}{2}(v - f(v)) \in E_1(f) + E_{-1}(f).$$

Ainsi $V = E_1(f) + E_{-1}(f)$. Le cours implique que ces espaces sont en somme directe, donc $V = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$.

d) On a $V = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$, donc f est diagonalisable.

$$\text{Si } v \in E_1(f), \quad f(v) = v, \text{ donc } f|_{E_1(f)} = \text{Id}_{E_1(f)}$$

$$\text{Si } v \in E_{-1}(f), \quad f(v) = -v, \text{ donc } f|_{E_{-1}(f)} = -\text{Id}_{E_{-1}(f)}$$

Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $E_1(f)$.

Soit $\mathcal{B}_2$ une base de $E_{-1}(f)$.

~~On a alors~~ Soit $\mathcal{B}$ la base de V obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

On a $\text{Mat}_B(I) = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & -I_{m_2} \end{pmatrix}$ avec $m_1 = \dim E_1(I)$
 $m_2 = \dim E_2(I)$

Alors $m_1 + m_2 = \dim V$

et $\text{Tr}(I) = \text{Tr}(\text{Mat}_B(I)) = m_1 - m_2$

Ainsi $\dim E_1(I) = \frac{\dim V + \text{Tr}(I)}{2}$

$\dim E_2(I) = \frac{\dim V - \text{Tr}(I)}{2}$

Exercice 5 a) $\Delta \neq 0$ donc $P(X)$ a deux racines distinctes

dans $\mathbb{C}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ainsi $P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$.

Montrons que $\mathbb{C}^n = E_{\lambda_1}(A) + E_{\lambda_2}(A)$.

$$\begin{aligned} \text{Si } v \in \mathbb{C}^n, \quad A(Av - \lambda_1 v) &= (A - \lambda_2 I_n)(A - \lambda_1 I_n)(v) \\ &\quad + \lambda_2 (Av - \lambda_1 v) \\ &= P(A)(v) + \lambda_2 (Av - \lambda_1 v) \\ &= \lambda_2 (Av - \lambda_1 v) \end{aligned}$$

donc $Av - \lambda_1 v \in E_{\lambda_2}(A)$.

$$\text{et } A(Av - \lambda_2 v) = P(A)(v) + \lambda_1 (Av - \lambda_2 v) = \lambda_1 (Av - \lambda_2 v)$$

donc $Av - \lambda_2 v \in E_{\lambda_1}(A)$

$$\text{Si } v \in \mathbb{C}^n, \quad v = \frac{(Av - \lambda_1 v) - (Av - \lambda_2 v)}{\lambda_2 - \lambda_1} \in E_{\lambda_2}(A) + E_{\lambda_1}(A)$$

Donc $\mathbb{C}^n = E_{\lambda_1}(A) + E_{\lambda_2}(A)$ et donc A est

diagonalisable.

b) $\Delta = 0$. $P(X) = (X - \lambda)^2$ où λ est l'unique racine de $P(X)$.

Soit $\mu \in Sp(A)$. Soit $v \in \mathbb{C}^n$ vecteur propre de A de valeur propre μ . Alors $P(A)(v) = 0_{\mathbb{C}^n}$

$$\begin{aligned} &= (A^2 - \lambda I_n)^2(v) \\ &= (A - \lambda I_n)((A - \lambda I_n)v) \\ &= (A - \lambda I_n)(Av - \lambda v) \\ &= (A - \lambda I_n)(\mu v - \lambda v) \\ &= (\mu - \lambda)((A - \lambda I_n)(v)) \\ &= (\mu - \lambda)^2 v. \end{aligned}$$

Comme $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$, on a $(\mu - \lambda)^2 = 0$ et donc $\mu = \lambda$.

Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, A possède au moins une valeur propre et donc $Sp(A) = \{\lambda\}$.

Si A est diagonalisable, $\mathbb{C}^n = E_\lambda(A)$, donc $\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathbb{C}^n$ donc $A = \lambda I_n$.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P(X) = X^2$. On a $P(A) = 0$.

A n'est pas diagonalisable car $\chi_A(X) = X^2$ donc

$Sp(A) = \{0\}$. Si A était diagonalisable, on aurait

$\mathbb{C}^2 = E_0(A) = \text{Ker } A$ et $A = 0_2$, ce qui est faux.

Exercice 5 a) $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X - (1+i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X - (1-i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X - (-1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X - (-1-i) \end{vmatrix}$

$$= (X - (1+i))(X - (1-i))(X - (-1+i))(X - (-1-i))$$

$$= (X^2 - (1+i)^2)(X^2 - (1-i)^2) = (X^2 - 2i)(X^2 + 2i)$$

$$= (X^4 - (2i)^2) = X^4 + 4.$$

On a $S_p(M) = \{1+i, 1-i, -1-i, -1+i\}$.

b) $\text{Card } S_p(M) = 4$ donc M est diagonalisable.

Il existe donc une base B de $\mathbb{C}^4$ telle que, si

$$P = P_{B \leftarrow \mathcal{B}}, \quad P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-i \end{pmatrix}.$$

Comme $(1+i)^4 = (1-i)^4 = (-1+i)^4 = (-1-i)^4 = -4$, on a

$$(\tilde{P}^{-1}MP)^4 = -4I_4$$

" $\tilde{P}^{-1}M^4P$

donc $M^4 = P(-4I_4)P^{-1} = -4P \cdot P^{-1} = -4I_4.$

Ainsi $M^4 + 4I_4 = 0_4$ et M est annihilée par

$$P(X) = X^4 + 4.$$

c) $1+i, 1-i, -1+i, -1-i \in S_p(M).$

Si $P(X)$ annule M , alors $(1+i), (1-i), (-1+i), (-1-i)$ sont racines de $P(X)$. Donc

$$\underbrace{(X-(1+i))(X-(1-i))(X-(-1+i))(X-(-1-i))}_{= X^4 + 4} \text{ divise } P(X)$$

Ainsi $X^4 + 4$ doit diviser $P(X)$.

$X^4 + 4$ est donc le polynôme annulateur de plus petit degré de M .