

TD 8, correction partielle

Exercice 1 a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

On a bien $AX_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ -4x_n + 5x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$
 $= X_{\vec{n}+1}$

b) Calculons le polynôme caractéristique de A

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ 4 & X-5 \end{vmatrix} = X(X-5) + 4 = X^2 - 5X + 4$$

$\Delta = 25 - 16 = 9$ les racines de $\chi_A(X)$ sont $\frac{5 \pm 3}{2} = 4$ et 1.
On a donc $\text{Sp}(A) = \{1, 4\}$ et $\text{Card Sp}(A) = 2$.
La matrice A est donc diagonalisable.

Calculons ses sous-espaces propres.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

donc $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_4(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + y = 0 \\ -4x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 4x$$

donc $E_4(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

Ainsi $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est une base propre de A.

Posons $P = P_{\mathcal{B}_{\text{can}} \rightarrow \mathcal{B}}$, on a alors

$$P^{-1}AP = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } A = PDP^{-1}$$

avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$c) A^n = P D^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1} \quad \forall n \geq 0$$

Calculons P^{-1} . En utilisant la formule de Cramer :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4^n \\ 1 & 4^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 - 4^n & -1 + 4^n \\ 4 - 4^{n+1} & -1 + 4^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\forall n \geq 0, \quad X_n = A^n X_0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\mu_n = \frac{1}{3} \left((4 - 4^n) \mu_0 + (4^n - 1) \mu_1 \right)}$$

Exercice 2 a) Posons $X_n = \begin{pmatrix} \mu_n \\ \mu_{n+1} \end{pmatrix}$.

En posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $(X_n)_{n \geq 0}$ vérifie la relation

de récurrence linéaire $X_{n+1} = A X_n$

$$\text{On a } \chi_A(X) = X^2 - X - 1 \quad \text{donc } \text{Sp } A = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Ainsi $\text{Card Sp}(A) = 2$ et A est diagonalisable.

$$\text{Posons } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_\alpha(A) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha x + y = 0 \\ x + (1-\alpha) y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow y = \alpha x$$

$$\text{d'où } E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{En effet, } \alpha^2 = \alpha + 1 \\ \text{donc } \alpha^{-1} = - (1 - \alpha)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_\beta(A) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta x + y = 0 \\ x + (1-\beta) y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow y = \beta x \\ \text{car } \beta^{-1} = - (1 - \beta)$$

d'où $E_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \right)$

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ on a

donc $A = P D P^{-1}$

On en déduit, $\forall n \geq 0$, $A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1}$

Calculons P^{-1} : $\det(P) = \beta - \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}$

donc $P^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$

et $A^n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha^n & \beta^n \\ \alpha^{n+1} & \beta^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$
 $= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \beta \alpha^n - \alpha \beta^n & -\alpha^n + \beta^n \\ \beta \alpha^{n+1} - \alpha \beta^{n+1} & -\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} \end{pmatrix}$

Ainsi $X_n = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} ((\beta \alpha^n - \alpha \beta^n) \alpha - \alpha^n + \beta^n)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^n (\beta \alpha - 1) - \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^n (-\alpha + 1)$$

b)

On a $\alpha > 1$ et $-1 < \beta < 0$ donc $\alpha^n \rightarrow +\infty$ $\beta^n \rightarrow 0$

Ainsi $\lim u_n \sim -\frac{1}{\sqrt{5}} (\beta \alpha - 1) \alpha^n$ si $\beta \alpha - 1 \neq 0$

et $\lim u_n = 0$ si $\beta \alpha - 1 = 0$

On a $\beta^{-1} = -\alpha = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta < 0$

Ainsi $\beta \alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ainsi $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

et (u_n) diverge si $\alpha \neq -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 3 a) Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

le système est équivalent à $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & x \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (x-1) \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= -(-1+x) + (x-1)(x^2-1) = (x+1)((x-1)^2-1)$$

$$= (x+1)(x^2-2x) = x(x-2)(x+1).$$

On a $\text{Sp}(A) = \{0, -1, 2\}$ de sorte que la matrice A est diagonalisable.

Diagonalisons la matrice A pour résoudre le système.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x & y+z=0 \\ & z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=-y \end{cases}$$

$$E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Posons } B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Dans la base B , le système devient $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -y \\ z' = 2z \end{cases}$

Une base de solutions du système différentiel est donc donnée par les fonctions

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$Y(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$Z(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des fonctions de la forme $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

b) Soit $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ une solution de l'équation

Elle est constante si sa dérivée est nulle.

Comme $X' = 0$, $Y' = -Y$ et $Z' = 2Z$, on a

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)' = -\beta Y + 2\gamma Z$$

Ainsi $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ est constante si et seulement si $\beta = \gamma = 0$.

Les solutions constantes sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix} \quad \text{pour } a \in \mathbb{R}.$$

c) Soient x, y, z tq $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est solution du système.

Il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta e^{-t} + 2\gamma e^{2t} \\ \gamma - \beta e^{-t} + \gamma e^{2t} \\ -\alpha + 3\gamma e^{2t} \end{pmatrix}$$

$x(t) \rightarrow 0$ si $\gamma = 0$.
 $t \rightarrow +\infty$

d) De même $|x(t)| \rightarrow +\infty$ si $\gamma \neq 0$. Dans ce cas,
 $t \rightarrow +\infty$

$$x(t) \sim 2\gamma e^{2t} \quad t \rightarrow +\infty$$

Exercice 1 a) On peut prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$

b) $X_A(x) = x^2 + 5x - 6 \quad \Delta = 25 + 24 = 49$

$$Sp(A) = \left\{ \frac{-5+7}{2} = 1, \frac{-5-7}{2} = -6 \right\}.$$

Card $Sp(A) = 2$ donc A est diagonalisable.

On en déduit (théorème du cours) que toute solution de $x'' + 5x' - 6x = 0$ est de la forme $\alpha e^t + \beta e^{-6t}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Déterminons α et β en fonction de $x(0)$ et $x'(0)$.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x(0) \\ \alpha - 6\beta = x'(0) \end{cases} \quad \text{ie} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix}$$

En utilisant la formule de Cramer,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6x(0) + x'(0) \\ x(0) - x'(0) \end{pmatrix}.$$

$$\text{et} \quad x(t) = \frac{1}{7} ((6x(0) + x'(0))e^t + (x(0) - x'(0))e^{-6t})$$

$$c) \quad x(t) = \frac{1}{7} (6e^t + e^{-6t}) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{6}{7} e^t$$

la solution n'est pas bornée.

d) Une solution x est bornée sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\boxed{6x(0) + x'(0) = 0}$

En effet, dans ce cas,

$$x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x(0) - x'(0)}{7} e^{-6t} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty$$

x est continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.

Elle est donc bornée sur $[0, +\infty[$.

Si $6x(0) + x'(0) \neq 0$, on a $x(t) \sim \frac{6x(0) + x'(0)}{7} e^t$ et
ce n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$.