

## TDF, correction partielle

Exercice 1  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$   $\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 2 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X(X-3) + 2$   
 $= X^2 - 3X + 2$

$$\Delta = 1 \quad \chi_A(x) = (x-2)(x-1) \quad \text{Sp}(A) = \{1, 2\}$$

$\text{Card}(\text{Sp}(A)) = 2$  donc  $A$  est diagonalisable

Cherchons une base de diagonalisation dans  $\mathbb{Q}^2$ .

$$E_1(A) = \text{Ker}(A - I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

$$E_1(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une base de } E_1(A)$$

$$E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow x = 2y$$

$$E_2(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une base de } E_2(A).$$

Ainsi  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base propre de  $A$ .

Prenons  $P = P_{\mathcal{B} \leftarrow \text{can} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Alors  $P^{-1}AP = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\text{et } A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \chi_B(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 1 & x-4 \end{vmatrix} = x^2 - 6x + 8 + 1 = (x-3)^2$$

$$\text{Sp}(B) = \{3\}. \text{ Ainsi } \dim E_3(B) = 1 \text{ ou } 2.$$

Si  $\dim E_3(B) = 2$ , alors  $B$  est diagonalisable

Si  $\dim E_3(B) = 1 < 2$ , alors  $B$  n'est pas diagonalisable.

Si  $\dim E_3(B) = 2$ , on a  $E_3(B) = \mathbb{Q}^2$  et donc  $\text{Ker}(B - 3I_2) = \mathbb{Q}^2$

$$\text{d'où } B = 3I_2. \text{ Or } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $\dim E_3(B) = 1$  et  $B$  n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 a) Calculons  $\chi_f(x)$ .

$$\chi_f(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{=} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ -1 & x-1 & x-2 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$X_f(X) = (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 0 & X \end{vmatrix} = X(X-1)(X-2)$$

On a donc  $\text{Sp}(f) = \{0, 1, 2\}$

b) Comme  $\text{Card Sp}(f) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ ,  $f$  est diagonalisable.

Pour en donner une base propre, déterminons ses sous-espaces propres.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(f) = \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$E_0(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(f) \Leftrightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

$$E_1(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(f) \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -2z+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$$

$$E_2(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base propre de  $f$ .

c) Dans la base  $\mathcal{B}$ , on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Ainsi } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-5 & -1 & -3 \\ -4 & x-3 & -4 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-5 & -1 & 2-x \\ -4 & x-3 & 0 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_1} = (x-2) \begin{vmatrix} x-5 & -1 & -1 \\ -4 & x-3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - C_3, C_2 \leftarrow C_2 - C_3} = (x-2) \begin{vmatrix} x-6 & 0 & 1 \\ -4 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(x) = (x-2) \begin{vmatrix} x-6 & 0 \\ -4 & x-3 \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)(x-6)$$

$\text{Sp}(A) = \{2, 3, 6\}$  Comme  $\text{Card}(\text{Sp}(A)) = 3$ ,  $A$  est diagonalisable.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 1-x & -1 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & -2 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1) \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)((x-2)(x-3)-2)$$

$$= (x-1)(x^2 - 5x + 4) = (x-1)^2(x-4)$$

On a donc  $\text{Sp}(B) = \{1, 4\}$ .

Pour déterminer si  $B$  est diagonalisable il faut donc calculer

$$\dim E_1(B) + \dim E_4(B)$$

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \text{rg}(B - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Ainsi } \dim E_1(B) = \dim \text{Ker}(B - I_3) = 2$$

Comme  $4 \in \text{Sp}(B)$ ,  $\dim E_4(B) \geq 1$  on a donc

$$\dim E_1(B) + \dim E_4(B) \geq 3 \text{ et donc } B \text{ est diagonalisable.}$$

Exercice 4 a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$   $\chi_A(x) = (x-1)^2(x+1)$  donc  $\text{Sp}(A) = \{1, -1\}$

b)  $\text{rg}(A + I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$  donc  $\dim E_{-1}(A) = 1$

c)

$$A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \dim E_1(A) + \dim E_{-1}(A) = 3 \Leftrightarrow \dim E_1(A) = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{rg}(A - I_3) = 1$$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + \frac{c}{2} L_3$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{b}{2} L_3$$

donc  $\text{rg}(A - I_3) = 2 \Leftrightarrow a = 0$

$A$  diagonalisable si et seulement si  $a = 0$ .

Exercice 5 a) On a  $\dim V = 4$ .

$$f(E_{11}) = E_{22} \quad f(E_{12}) = -E_{12} \quad f(E_{21}) = -E_{21} \quad f(E_{22}) = E_{11}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) f(E_{11} + E_{22}) = E_{11} + E_{22} \text{ donc } E_{11} + E_{22} \in E_+(f)$$

$$f(E_{11} - E_{22}) = -(E_{11} - E_{22}) \text{ donc } E_{11} - E_{22} \in E_-(f)$$

$$E_{12}, E_{21} \in E_-(f)$$

La famille  $(E_{12}, E_{21}, E_{11} - E_{22})$  est libre :

$$a E_{12} + b E_{21} + c (E_{11} - E_{22}) = 0_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & a \\ b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = 0$$

Ainsi  $\dim E_-(f) \geq 3$  et  $\dim E_+(f) \geq 1$

$\dim E_-(f) + \dim E_+(f) \geq 4 = \dim V$  donc  $f$  est diagonalisable  
et  $\dim E_-(f) = 3$  et  $\dim E_+(f) = 1$ .

Ainsi  $(E_{12}, E_{21}, E_{11} - E_{22})$  est une base de  $E_-(f)$  et  
 $(E_{11} + E_{22})$  est une base de  $E_+(f)$ .

Exercice 6 a) On a  $f(1) = 0$

$$f(x) = 3x$$

$$\text{si } m \geq 2 \quad f(x^m) = (x^2 - 1)m(m-1)x^{m-2} + 3xm x^{m-1}$$

$$= (m(m-1) + 3m)x^m - m(m-1)x^{m-2}$$

$$= m(m+2)x^m - m(m-1)x^{m-2}$$

$$\text{On a donc } \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & -n(n-1) \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n(n+2) & 0 \end{pmatrix}$$

Plus précisément,  $\text{Mat}_B(f) = (a_{i,j})$

avec  $a_{i,j} = 0$  si  $i \neq j$  et  $i \neq j-2$

$$a_{i,i} = (i-1)(i+1)$$

$$a_{i,i+2} = -i(i+1)$$

b) La matrice  $\text{Mat}_B(f)$  est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont donc ses entrées diagonales.

$$\text{Ainsi } \text{Sp}(f) = \text{Sp}(\text{Mat}_B(f)) = \{ (i-1)(i+1) \mid 1 \leq i \leq n+1 \}$$

La fonction  $t \mapsto (t-1)(t+1)$  est strictement croissante sur

$$[1, +\infty[ \text{ donc } \text{Card}(\text{Sp}(f)) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$$

On en déduit que  $f$  est diagonalisable et que

$$\dim E_\lambda(f) = 1 \text{ si } \lambda \in \text{Sp}(f).$$

c) On a  $\dim E_\lambda(f) = 1$  et  $\lambda \in E_\lambda(f)$

$$\text{donc } f(P) = P \Leftrightarrow P(x) = \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$