

TD 6, correction partielle

Exercice 1 a) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ -2x-y \end{pmatrix}$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=0 \\ -2x-y=0 \end{cases} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x=0 \\ -2x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

0 n'est pas valeur propre de f et $E_0(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=x \\ -2x-y=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=0 \\ -2x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$E_1(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Ainsi 1 est valeur propre de f .

b) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5x-3y-3z \\ 3x-y-3z \\ 3x-3y-z \end{pmatrix}$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3y-3z=-x \\ 3x-y-3z=-y \\ 3x-3y-z=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-3y-3z=0 \\ 2x-3z=0 \\ 3x-3y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$E_{-1}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc -1 est valeur propre de f

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3y-3z=2x \\ 3x-y-3z=2y \\ 3x-3y-z=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3y-3z=0 \\ 3x-3y-3z=0 \\ 3x-3y-3z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x-y-z=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

On a donc $E_2(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc 2 est valeur propre de f .

Si $y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$, on a $y = z = 0$, la famille $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ est donc libre et fournit une base de $E_2(f)$.

Exercice 2 a) Vérifions que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$P = (U \ V \ W) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \det(P) = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -(-3+2) = 1$$

$\det P \neq 0$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$AU = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -6 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = U \quad \text{Comme } U \neq 0_{\mathbb{R}^3}, U \text{ est vecteur propre de } A \text{ de valeur propre } 1.$$

$$AV = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -V, \quad V \neq 0_{\mathbb{R}^3} \text{ donc } V \text{ est vecteur propre de } A \text{ de valeur propre } -1$$

$$AW = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -W, \quad W \neq 0_{\mathbb{R}^3} \text{ donc } W \text{ est vecteur propre de } A \text{ de valeur propre } -1$$

b) Soit f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f_A(x) = Ax$.

$$\text{Alors } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } \text{Sp}(A) = \text{Sp}(f_A) = \{1, -1\}.$$

$$\text{On a } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \text{donc } f_A \circ f_A = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A^2) \quad \text{et donc } A^2 = I_3.$$

Exercice 3 a) $P = (U_1 \ U_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det P = 2-1=1 \neq 0$
donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

$$AU_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot U_1, \quad AU_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot U_2$$

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base propre de A .

b) On résout l'équation $Ax = U$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \text{Ainsi } Ax = U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} [x]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}}$$

comme $[U]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} [X]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}}$

$$\Leftrightarrow [X]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = U_1 - \frac{1}{3} U_2$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 a) $\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ donc $\dim \text{Im } f = \text{rg } f = 1$

Ainsi $\dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg } f = 3$.

$E_0(f) = \text{Ker } f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc 0 est valeur propre de f .

b) On a $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$

$$\begin{aligned} \text{donc } f(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) \\ &= 4 \cdot (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \end{aligned}$$

Comme $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, ce vecteur est vecteur propre de f , de valeur propre 4.

c) Les sous-espaces $E_1(f)$ et $E_0(f)$ sont supplémentaires, on a donc $E_1(f) \oplus E_0(f) \subset \mathbb{R}^4$

Comme $\dim E_1(f) \geq 1$ et $\dim E_0(f) = 3$, on a

$$4 \leq \dim (E_0(f) \oplus E_1(f)) \leq \dim \mathbb{R}^4 = 4$$

donc $E_0(f) \oplus E_1(f) = \mathbb{R}^4$ et $\dim E_1(f) = 1$

Déterminons une base de $E_0(f)$.

$$E_0(f) = \text{Ker } f = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est donc

une base propre de f et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On en déduit que $\text{Sp}(f) = \{4, 0\}$.

Exercice 4 a) On écrit la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$

$$f(1) = 1 \quad f(x) = x+1+x = 2x+1 \quad f(x^2) = 2(x^2+1) + 2x(x+1) + x^2 \\ = 5x^2 + 2x + 2$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\chi_f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)$$

b) les valeurs propres de f sont les racines de χ_f . Ainsi $\text{Sp}(f) = \{1, 2, 5\}$.

Déterminons les vecteurs propres de f . Posons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z = 0 \\ z + 2z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0$$

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_1(f) = \text{Vect}(1).$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ 2z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_2(f) = \text{Vect}(x+1)$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + y + 2z = 0 \\ -3z + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}z \\ \frac{2}{3}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$E_5(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_5(f) = \text{Vect}(2 + 2x + 3x^2).$$

(Vérifions nos calculs :

$$f(x+1) = (x^2+1)(x+1)' + (x+1)(x+1)' + x+1 \\ = 2(x+1) \quad \checkmark$$

$$f(2+2x+3x^2) = (x^2+1)(2+2x+3x^2)'' + (x+1)(2+2x+3x^2)' + 2+2x+3x^2 \\ = 6(x^2+1) + (x+1)(2+6x) + 2+2x+3x^2$$

$$= 6x^2 + 6x^2 + 3x^2 + 2x + 6x + 2x + 6 + 2 + 2$$

$$= 15x^2 + 10x + 10 = 5(2 + 2x + 3x^2) \quad \checkmark \quad)$$

Exercice 5 a) Posons $A = \text{Mat}_{\text{Bcan}}(f)$. On a donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im } A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Comme } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_4, \quad \text{rg } A = \dim \text{Im } A = \dim \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1.$$

$$\text{Ainsi } \text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 1.$$

$$\text{Le théorème du rang implique alors } \dim \text{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \text{rg}(f) \\ = 4 - 1 = 3.$$

On en déduit que $\text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ donc 0 est valeur propre de f .
(cf cours).

b) Par définition, $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$

$$f(e_2) =$$

$$f(e_3) =$$

$$f(e_4) =$$

$$\text{donc } f(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) \\ = 4(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

Ainsi, puisque $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \neq 0_{\mathbb{R}^4}$, $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de f de valeur propre 4.

$$\text{Autre raisonnement : } [e_1 + e_2 + e_3 + e_4]_{\text{Bcan}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est}$$

vecteur propre de A de valeur propre 4.

Ainsi $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de f de valeur propre 4
(cf cours).

c) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de f .

$\text{Ker } f$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dim 3 dont les vecteurs non nuls sont des vecteurs propres de f . Déterminons une base de $\text{Ker } f$.

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y+z+t=0.$$

On obtient donc une base de $\text{Ker } f$ en considérant les vecteurs v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} y=1 \\ z=0 \\ t=0 \end{cases} \leadsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y=0 \\ z=1 \\ t=0 \end{cases} \leadsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ t=1 \end{cases} \leadsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\text{Ker } f$ constituée de vecteurs propres de f (ils sont non nuls et dans $\text{Ker } f$).

Vérifions alors que la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

convient : * c'est une famille de vecteurs propres de f .

* c'est une base de $\mathbb{R}^4$, en effet

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Posons $\mathcal{B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_4} \right).$

On a $f(v_1) = 4v_1$, $f(v_2) = 0_{\mathbb{R}^4}$, $f(v_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$, $f(v_4) = 0_{\mathbb{R}^4}$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } \chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} = X^3(X-4).$$

$$S_p(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3(x-4) = 0 \} = \{ 0, 4 \} \quad \text{les valeurs propres de } f \text{ sont } 0 \text{ et } 4.$$