

TD5 Corrigé partiel

Exercice 1 a) $A_{1,1} = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$ $A_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$ $A_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & f \end{pmatrix} \quad A_{2,2} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & f \end{pmatrix} \quad A_{2,3} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{3,1} = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} \quad A_{3,2} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & e \end{pmatrix} \quad A_{3,3} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

On a donc $\text{Com}(A) = ((-1)^{i+j} \det A_{i,j}) = \begin{pmatrix} d & f & 0 & 0 \\ -b & f & a & 0 \\ be-dc & -ae & ad \end{pmatrix}$

b) $\det A = a d f \neq 0$ donc A est inversible. La formule de Cramer donne

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{Com} A = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}d^{-1}b & \frac{be-dc}{adf} \\ 0 & d^{-1} & -d^{-1}f^{-1}e \\ 0 & 0 & f^{-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 2 a) On essaye de faire apparaître des zéros dans la première colonne. Pour cela on effectue les opérations sur les lignes $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \text{ etc. } L_n \leftarrow L_n - L_1.$$

On ne change pas le déterminant ainsi obtenu.

D'où $\det(A_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$ On reconnaît le

déterminant de la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$

$$\text{Ainsi } \det(A_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = 1 \times \det(A_{n-1}) = \det(A_{n-1})$$

b) On a $\det(A_1) = 1$. Une récurrence immédiate utilisant a) montre que $\forall n \geq 1, \det(A_n) = 1$.

Exercice 3 $u = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det(u, v, w) \neq 0$.

On a

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} 2x & y & x \\ x & 0 & y \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ 0 & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2x & x \\ x & y \end{vmatrix} \\ = y^2 - 2xy + x^2 = (x - y)^2.$$

la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $x \neq y$.

Exercice 4 Effectuons l'opération $C_3 \leftarrow C_3 + 10C_2 + 100C_1$ qui ne modifie pas la valeur du déterminant.

On a donc

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 111 \\ 1 & 4 & 148 \\ 4 & 8 & 481 \end{vmatrix} = 37 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{111}{37} \\ 1 & 4 & \frac{148}{37} \\ 4 & 8 & \frac{481}{37} \end{vmatrix}$$

Comme $\frac{111}{37}$, $\frac{148}{37}$ et $\frac{481}{37}$ sont entiers, la formule

de définition du déterminant implique $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{111}{37} \\ 1 & 4 & \frac{148}{37} \\ 4 & 8 & \frac{481}{37} \end{vmatrix} \in \mathbb{Z}$

de sorte que 37 divise $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$. (sans calcul...)

Exercice 5 $AB = 0 \Rightarrow \det(AB) = \det(A) \det(B) = 0$

donc $\det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$. Mais on demande plus, on veut montrer que $\det(A) = 0$ et $\det(B) = 0$. Comme $AB = 0$, la matrice A n'est pas inversible.

En effet, si A était inversible, l'égalité $AB=0$ impliquerait $\underbrace{A^{-1} \cdot AB}_{=B} = 0$ donc $B=0$, ce qui est faux.

Ainsi A n'est pas inversible donc $\det(A) = 0$.

De même si B est inversible, alors

$AB=0 \Rightarrow A = AB B^{-1} = 0 B^{-1} = 0$, ce qui est faux. Donc B n'est pas inversible et donc $\det(B) = 0$.
Au final $\det(A) = 0$ et $\det(B) = 0$.

Exercice 6 a)
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ y & 2 & 5 \\ z & 3 & 6 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= -3x + 6y - 3z$$

b) les deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une famille libre et engendrent un sous-espace vectoriel V de dimension 2. Un vecteur w appartient à V si et seulement si la famille (w, u, v) est liée.

En effet $w \in V \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq $w = \lambda u + \mu v$
donc $w - \lambda u - \mu v = 0$. la famille est liée.

Réciproquement si la famille (w, u, v) est liée, alors

$\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $a w + b u + c v = 0$.

Si $a = 0$, $b u + c v = 0 \Rightarrow b = c = 0$ car (u, v) est libre.

Absurde.

Donc $a \neq 0$ et $w = -\frac{b}{a} u - \frac{c}{a} v \in V$.

c) D'après b), $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect}(u, v) \Leftrightarrow$ la famille $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ est liée

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 4 \\ y & 2 & 5 \\ z & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Donc } V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 6y - 3z = 0 \right\}.$$