

TD4 Corrigé

Exercice 1

a) Posons $\sigma = (a, b)$ $\tau = (b, c)$.

On a $\tau(b) = c$, $\tau(c) = b$, $\tau(a) = a$ car $a \notin \{b, c\}$

$\sigma(a) = b$ $\sigma(b) = a$ $\sigma(c) = c$ car $c \notin \{a, b\}$

Ainsi $(\sigma \circ \tau)(a) = \sigma(\tau(a)) = \sigma(a) = b$

$(\sigma \circ \tau)(b) = \sigma(\tau(b)) = \sigma(c) = c$

$(\sigma \circ \tau)(c) = \sigma(\tau(c)) = \sigma(b) = a$

Par ailleurs $\tau(i) = i$ et $\sigma(i) = i$ si $i \notin \{a, b, c\}$ donc $(\sigma \circ \tau)(i) = i$ dès que $i \notin \{a, b, c\}$. La permutation $\sigma \circ \tau$ est bien le 3-cycle (a, b, c) .

b) Soit H_k l'hypothèse de récurrence "si $a_1, \dots, a_k$ sont des entiers distincts, $(a_1, a_2) \circ \dots \circ (a_{k-1}, a_k) = (a_1, \dots, a_k)$ "

H_2 est vraie de façon tautologique.

Supposons H_k vraie et prouvons H_{k+1} .

Soient $a_1, \dots, a_{k+1} \in \{1, \dots, n\}$ distincts. Par H_k , on a

$$(a_2, a_3) \circ \dots \circ (a_k, a_{k+1}) = (a_2, \dots, a_{k+1}).$$

Posons $\sigma = (a_1, a_2)$ et $\tau = (a_2, \dots, a_{k+1})$. Il suffit donc de prouver que $\sigma \circ \tau = (a_1, \dots, a_{k+1})$.

* si $i \notin \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$, $\sigma(i) = i$ et $\tau(i) = i$ donc $(\sigma \circ \tau)(i) = i$

* $(\sigma \circ \tau)(a_1) = \sigma(\tau(a_1)) = \sigma(a_1) = a_2$

* si $2 \leq i \leq k$, $\sigma(\tau(a_i)) = \sigma(a_{i+1}) = a_{i+1}$ car $a_{i+1} \notin \{a_1, a_2\}$

* $(\sigma \circ \tau)(a_{k+1}) = \sigma(\tau(a_{k+1})) = \sigma(a_2) = a_1$.

On a donc bien $\sigma \circ \tau = (a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$, ce qui prouve H_{k+1} .

c) Soit $\sigma = (a_1, \dots, a_k)$ un k -cycle.

D'après b), on a $\sigma = (a_1, a_2) \circ \dots \circ (a_{k-1}, a_k)$. Ainsi

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((a_1, a_2)) \circ \dots \circ \varepsilon((a_{k-1}, a_k)) = \underbrace{(-1) \circ \dots \circ (-1)}_{k-1} = (-1)^{k-1}$$

d) D'après c), $\varepsilon((3, 4)) = -1$, $\varepsilon((1, 2, 7)) = 1$, $\varepsilon((5, 8, 9)) = 1$

donc $\varepsilon((3, 4)(1, 2, 7)(5, 8, 9)) = (-1)$.

Exercice 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 \\ 3 & -6 & -12 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{dér selon la 1ère ligne}} 1 \times \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= (-3) \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -12 \end{vmatrix} \quad \text{par linéarité selon la 1ère colonne}$$

$$= (-3)(-6) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{2ème colonne}$$

$$= 0 \quad (\text{deux colonnes égales})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \ln 3 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \ln 3 \end{vmatrix} \quad \text{par développement selon la 3ème colonne}$$

$$= -1 \quad (\text{formule du det } 2 \times 2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c+a & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{linéarité selon la 3ème ligne}$$

$$= 0 \quad (2 \text{ lignes égales})$$

Exercice 3

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_5 - L_4$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -5 & 1 \\ -5 & -7 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{dév selon la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne})$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} \quad \swarrow \text{dév selon la 3}^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ &= \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 3 \times 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 6 (2+1) = 18 \end{aligned}$$

Exercice 4 Un calcul donne ${}^t M M = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) I_4$

$$\text{Ainsi } \det({}^t M M) = \det({}^t M) \det(M) = \det(M)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$$

$$\text{On en déduit que } \det(M) = \pm (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

$$\text{donc que } |\det(M)| = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

(on peut montrer que $\det(M) = + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ mais c'est plus compliqué).

Exercice 5 a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -2 \\ 0 & a^2-1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & -2 \\ a^2-1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2(1-a^2) \end{aligned}$$

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow a \notin \{1, -1\}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \\ \det(B) &= \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a+1 & a+2 \\ 1 & a+2 & 2a+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 2 & 2a+3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ 2 & 2a+3 \end{vmatrix} = 2a+3 - 2(a+1) = 1$$

B est inversible quelque soit la valeur de a.

$$\det(C) = \begin{vmatrix} \cos a & 1 & -\sin a \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{vmatrix} \quad \text{développement selon la 2}^{\text{e}} \text{ colonne}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \sin a & \cos a \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(\cos^2 a + \sin^2 a) = 2$$

C est inversible quelque soit la valeur de a.

Exercice 6

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & c & c & c \\ a & d & d & d \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & c-a & c-a & c-a \\ 0 & d-a & d-a & d-a \end{vmatrix}$$

$$= a(b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

cette matrice a deux lignes égales

la matrice A n'est jamais inversible

$$\det(B) = \begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}} \begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a-b & b-a & 0 & 0 \\ a-b & 0 & b-a & 0 \\ a-b & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)^3 \begin{vmatrix} b & a & a & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)^3 \begin{vmatrix} b+3a & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \\ 1 \end{matrix}$$

$$= (b+3a)(b-a)^3$$

La matrice B est inversible $\Leftrightarrow \det(B) \neq 0$

$$\Leftrightarrow b \notin \{-3a, a\}.$$