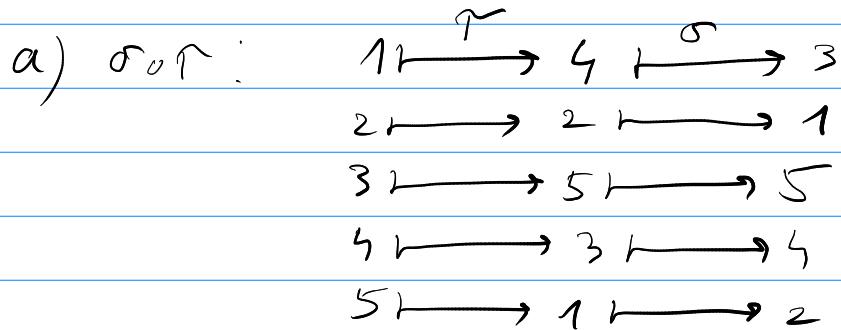


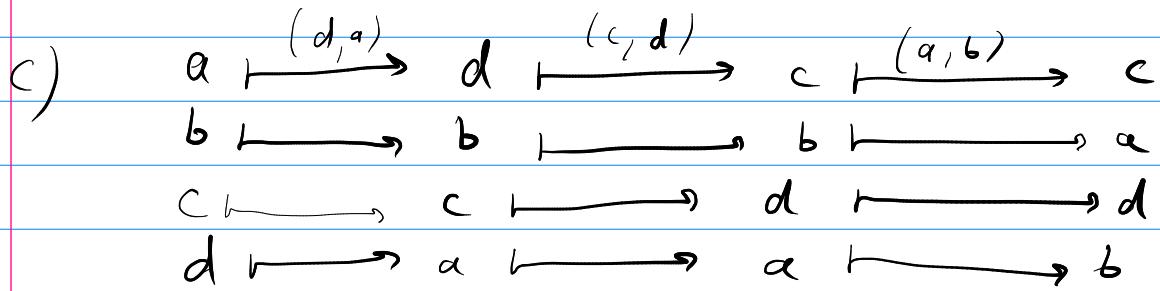
T D 3 Cyclic

Exercise 1 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$



done $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$



done $(a, b) \circ (c, d) \circ (d, a) = (a, c, d, b)$

an um 4-cycle.

Exercice 2 a) $\text{Id}, (12), (23), (13), (123), (132)$ sont 6 éléments distincts de G_3 . Comme $\text{Card } G_3 = 6$, il n'y en a pas d'autres.

$$G_3 = \{\text{Id}, (12), (23), (13), (123), (132)\}$$

	Id	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
Id	Id	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
(12)	(12)	Id	(123)	(132)	(23)	(13)
(23)	(23)	(132)	Id	(123)	(13)	(12)
(13)	(13)	(123)	(132)	Id	(12)	(23)
(123)	(123)	(13)	(12)	(23)	(132)	Id
(132)	(132)	(23)	(13)	(12)	Id	(123)

b) Vérifions dans un premier temps que μ_3 est stable par $*$.

$$\mu_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\} \quad \text{Si } z_1, z_2 \in \mu_3, (z_1 z_2)^3 = z_1^3 z_2^3 = 1 \text{ donc } z_1 z_2 \in \mu_3$$

La loi de multiplication dans \mathbb{C} est associative, donc dans μ_3 également.

L'élément 1 est neutre.

Vérifions que tout élément de μ_3 possède un inverse par $*$.

$$1 * 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$j * j^2 = j^2 * j = 1 \text{ donc } j \text{ et } j^2 \text{ possèdent un inverse dans } \mu_3$$

$(\mu_3, *)$ est donc un groupe

Table de groupe

	1	j	j^2
1	1	j	j^2
j	j	j^2	1
j^2	j^2	1	j

Exercice 3 $\text{Id } \text{EG}_4$ \leftarrow signature 1

Transpositions $(12), (13), (14), (23), (24), (34)$

3-cycles $(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)$ signature 1

4-cycles $(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)$

$\rightarrow 21$ éléments, il en manque 3 car $\text{Card } \text{G}_4 = 4! = 24$

$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$ \leftarrow signature -1

$\text{G}_4 = \{ \text{Id}, (12), (13), (14), (23), (124), (34), (123), (132), (1241), (142), (134), (143), (234), (243), (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$

Un 3-cycle est de signature 1 car $(a, b, c) = (ab) \circ (bc)$

$$\text{donc } \varepsilon((a, b, c)) = \varepsilon((a, b)) \varepsilon((b, c)) = (-1)^2 = 1$$

Un 4-cycle est de signature -1 car $(a, b, c, d) = (a, b) \circ (b, c) \circ (c, d)$

Exercice 4 a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

ma $(14) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$(26) \circ (14) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$(4, 7) \circ (26) \circ (14) \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 9 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \text{Id}$

$$\text{donc } \sigma = ((4, 7) \circ (26) \circ (14))^{-1} = (14)^{-1} \circ (26)^{-1} \circ (4, 7)^{-1} \\ = (14) \circ (26) \circ (4, 7)$$

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((14)) \varepsilon((26)) \varepsilon((4, 7)) = (-1)^3 = -1$$

b) $\varepsilon(\sigma)^3 = \varepsilon(\sigma^3) = \varepsilon(\text{Id}) = 1$ donc $\varepsilon(\sigma) = 1$ car $(-1)^3 = -1$.

Exercice 5 a) 2 méthodes :

* soit on montre que f est injective et surjective

- injective $f(g_1) = f(g_2) \Rightarrow h * g_1 = h * g_2 \Rightarrow h^{-1} * (h * g_1) = h^{-1} * (h * g_2)$

$$\Rightarrow (h^{-1} * h) * g_1 = (h^{-1} * h) * g_2 \Rightarrow e * g_1 = e * g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

$$\text{- injective : si } g \in G, \quad f(h^{-1} * g) = h * (h^{-1} * g) = (h * h^{-1}) * g \\ = c * g = g$$

donc $f(h^{-1} * g) = g$.

* soit on construit directement une application réciproque

Poss F(g) = $h^{-1} * g$ pour $g \in G$.

On a alors, pour tout $g \in G$, $f(F(g)) = h * (h^{-1} * g) = (h * h^{-1}) * g = c * g = g$

donc $f \circ F = \text{Id}_G$

et, pour tout $g \in G$, $F(f(g)) = h^{-1} * (h * g) = (h^{-1} * h) * g = c * g = g$

donc $F \circ f = \text{Id}_G$

Ainsi f est bijective, de réciproque F .

b) Si $g \in G$, $g * \bar{g}^{-1} = c = \bar{g}^{-1} * g$. Ceci implique $(\bar{g}^{-1})^{-1} = g$

Ainsi $j(j(g)) = g$, c'est à dire $j \circ j = \text{Id}_G$

La fonction j est donc bijective, de réciproque j .