TD3 Corrigé

Exercice 1 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\sigma \circ \tau$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \overset{\tau}{\longmapsto} & 4 & \overset{\sigma}{\longmapsto} & 3 \\ 2 & \longmapsto & 2 & \longmapsto & 1 \\ 3 & \longmapsto & 5 & \longmapsto & 5 \\ 4 & \longmapsto & 3 & \longmapsto & 4 \\ 5 & \longmapsto & 1 & \longmapsto & 2 \end{array}$$

donc $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

c)

$$\begin{array}{ccccccc} a & \overset{(d,a)}{\longmapsto} & d & \overset{(c,d)}{\longmapsto} & c & \overset{(a,b)}{\longmapsto} & c \\ b & \longmapsto & b & \longmapsto & b & \longmapsto & a \\ c & \longmapsto & c & \longmapsto & d & \longmapsto & d \\ d & \longmapsto & a & \longmapsto & a & \longmapsto & b \end{array}$$

donc $(a,b) \circ (c,d) \circ (d,a) = (a,c,d,b)$

est un 4-cycle.

Exercice 2 a) Id, (12), (23), (13), (123), (132) sont 6 éléments distincts de $\mathfrak{S}_3$. Comme $\text{Card}\, \mathfrak{S}_3 = 6$, il n'y en a pas d'autres.

$\mathfrak{S}_3 = \{Id, (12), (23), (13), (123), (132)\}$

	Id	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
Id	Id	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
(12)	(12)	Id	(123)	(132)	(23)	(13)
(23)	(23)	(132)	Id	(123)	(13)	(12)
(13)	(13)	(123)	(132)	Id	(12)	(23)
(123)	(123)	(13)	(12)	(23)	(132)	Id
(132)	(132)	(23)	(13)	(12)	Id	(123)

b) Vérifions dans un premier temps que μ_3 est stable par $\times$.

$\mu_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}$ Si $z_1, z_2 \in \mu_3$, $(z_1 z_2)^3 = z_1^3 z_2^3 = 1$ donc $z_1 z_2 \in \mu_3$

La loi de multiplication dans $\mathbb{C}$ est associative, donc dans μ_3 également.

L'élément 1 est neutre.

Vérifions que tout élément de μ_3 possède un inverse pour $\times$.

$1 \times 1 = 1$ ✓

$j \times j^2 = j^2 \times j = 1$ donc j et j^2 possèdent un inverse dans μ_3

$(\mu_3, \times)$ est donc un groupe

Table de groupe

	1	j	j^2
1	1	j	j^2
j	j	j^2	1
j^2	j^2	1	j

Exercice 3 $Id \in \mathfrak{S}_4$ ← signature 1

Transpositions $(12), (13), (14), (23), (24), (34)$ ← signature -1

3-cycles $(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)$ signature 1

4-cycles $(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)$ ← signature -1

$\rightarrow$ 21 éléments, il en manque 3 car $\text{Card}\, \mathfrak{S}_4 = 4! = 24$

$(12)\circ(34)$, $(13)\circ(24)$, $(14)\circ(23)$ ← signature 1

$\mathfrak{S}_4 = \{ Id, (12), (13), (14), (23), (24), (34), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243),$
$(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), (12)\circ(34), (13)\circ(24), (14)\circ(23) \}$

Un 3-cycle est de signature 1 car $(a,b,c) = (ab)\circ(bc)$

donc $\varepsilon((a,b,c)) = \varepsilon((a,c))\,\varepsilon((b,c)) = (-1)^2 = 1$

Un 4-cycle est de signature -1 car $(a,b,c,d) = (a,b)\circ(b,c)\circ(c,d)$

Exercice 4 a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

on a $(14)\circ\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$(26)\circ(14)\circ\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$(4,7)\circ(26)\circ(14)\circ\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = Id$

donc $\sigma = \left((47)\circ(26)\circ(14)\right)^{-1} = (14)^{-1}\circ(26)^{-1}\circ(47)^{-1}$

$= (14)\circ(26)\circ(47)$

$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((14))\,\varepsilon((26))\,\varepsilon((47)) = (-1)^3 = -1$

b) $\varepsilon(\sigma)^3 = \varepsilon(\sigma^3) = \varepsilon(Id) = 1$ donc $\varepsilon(\sigma) = 1$ car $(-1)^3 = -1$.

Exercice 5 a) 2 méthodes :

* soit on montre que f est injective et surjective

- injective $f(g_1) = f(g_2) \Rightarrow h * g_1 = h * g_2 \Rightarrow h^{-1} * (h * g_1) = h^{-1} * (h * g_2)$

$\Rightarrow (h^{-1} * h) * g_1 = (h^{-1} * h) * g_2 \Rightarrow e * g_1 = e * g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$

- surjective : si $g \in G$, $f(h^{-1} * g) = h * (h^{-1} * g) = (h * h^{-1}) * g$
$= e * g = g$

donc $f(h^{-1} * g) = g$.

* soit on construit directement une application réciproque

Posons $F(g) = h^{-1} * g$ pour $g \in G$.

On a alors, pour tout $g \in G$, $f(F(g)) = h * (h^{-1} * g) = (h * h^{-1}) * g = e * g = g$

donc $f \circ F = Id_G$

et, pour tout $g \in G$, $F(f(g)) = h^{-1} * (h * g) = (h^{-1} * h) * g = e * g = g$

donc $F \circ f = Id_G$

Ainsi f est bijective, de réciproque F.

b) Si $g \in G$, $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$. Ceci implique $(g^{-1})^{-1} = g$

Ainsi $j(j(g)) = g$, c'est-à-dire $j \circ j = Id_G$

La fonction j est donc bijective, de réciproque j.