

TD 2, corrigé

Exercice 1 a) $f(v_1) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$ donc

$$[f(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ De même } [f(v_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } [f(v_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left([f(v_1)]_{\mathcal{B}}, [f(v_2)]_{\mathcal{B}}, [f(v_3)]_{\mathcal{B}} \right) \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)

$$\text{On a } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 a) $E = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 2x \}$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid (f - 2\text{Id})(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$$

$$= \text{Ker}(f - 2\text{Id}) \text{ donc } E \text{ est un}$$

sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

De même $F = \text{Ker}(f + 2\text{Id})$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{On a } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E \Leftrightarrow (A - 2I_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (3A - 6I_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3A - 6I_3 &= \begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 8 & -16 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -16 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \\ 8 & -16 & -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \\ &L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &L_1 \leftarrow -L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ -6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \\ &L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ &L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \\ &L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ &L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow 1$ variable libre

done $\dim E = 1$.

$$\text{De plus } E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_3 + x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est donc une base de E (droite vectorielle)

$$\text{De même } F = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid (3A + 6I_3)x = 0 \right\}.$$

$$3A + 6I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \\ 8 & -16 & 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \quad \underbrace{-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0}_{2 \text{ variables libres donc}}$$

$\dim F = 2$ et

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 - 2x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

la famille $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de F .

Comme $\dim F = 2$, c'est une base de F .

b) Montrons que E et F sont en somme directe.

Si $v \in E \cap F$, on a $f(v) = 2v$ et $f(v) = -2v$
donc $2v = -2v$ et $4v = 0 \Rightarrow v = 0_{\mathbb{R}^3}$

Ainsi $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. E et F sont en somme directe.

On a donc $\dim(E \oplus F) = \dim E + \dim F = 1 + 2 = 3$.

Comme $E \oplus F \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, on a $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

c) $f(v_1) = 2v_1$ car $v_1 \in E$

$f(v_2) = 2v_2$ et $f(v_3) = -2v_3$ car $v_2, v_3 \in F$.

$$[f(v_1)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [f(v_2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [f(v_3)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 9 & 0 & -6 & 3 \\ 18 & 9 & -17 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Pour déterminer une base du noyau de A , on peut effectuer des opérations sur les lignes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 9 & 0 & -6 & 3 \\ 18 & 9 & -17 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & 27 & -15 & 3 \\ 0 & 63 & -35 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 18L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2$$

$$\begin{aligned} \text{Ker } A = \text{Ker } B &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 9x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 + 9x_2 - 5x_3 = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

On obtient un système à 2 variables libres x_2 et x_3 et 2 variables principales x_1 et x_4 .

Une base de $\text{Ker } A$ est obtenue en considérant les cas $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ainsi

$$\text{Ker } A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

De plus il y a 2 variables principales donc

$$\text{rg } A = 2$$

b) x_1 et x_4 sont variables principales de l'équation du noyau de A .

Ainsi les vecteurs Ae_1 et Ae_4 forment une base de $\text{Im } A$

On a donc $\text{Im } A = \text{Vect}(v_1, v_4)$ où

$$v_1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} \text{ et } v_4 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 9 & 0 & -6 & 3 \\ 18 & 9 & -17 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} = v_1$$

$$Av_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = v_4$$

Si $v \in \text{Im } A$, $v = \alpha v_1 + \gamma v_4$ et

$$Av = \alpha Av_1 + \gamma Av_4 = \alpha v_1 + \gamma v_4 = v$$

Si $v \in \text{Im } A \cap \text{Ker } A$, $Av = 0$ car $v \in \text{Ker } A$
 $Av = v$ car $v \in \text{Im } A$
 donc $v = 0$ et $\text{Im } A \cap \text{Ker } A = \{0\}$.

Ainsi $\text{Im } A$ et $\text{Ker } A$ sont en somme directe.

d) On a $\dim(\text{Im } A \oplus \text{Ker } A) = 4$ donc

$$\text{Im } A \oplus \text{Ker } A = \mathbb{R}^4.$$

(w_1, w_2) est une base de $\text{Im } A$.

Soit $(w_1, w_2) \xrightarrow{\hspace{2cm}} \text{Ker } A$.

Par exemple $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Alors $B = (v_1, v_3, w_1, w_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

$$P = P_{B_{\text{can}} \rightarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 1 \\ 18 & 7 & -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Comme $Av_1 = v_1$, $Av_3 = v_3$, $Aw_1 = Aw_2 = 0$,

la matrice de $X \mapsto AX$ dans la base B

est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

On détermine $\text{Ker } A$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases} \xRightarrow{L_2 \leftarrow 3L_2 - 4L_1} \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ donc } \text{Ker } A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La matrice carrée A est donc inversible. Calculons son inverse.

$$\left. \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 4L_1 \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2 \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right| \begin{array}{l} I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -15 & 12 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

On obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ déterminons $\text{Ker } A$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \xRightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On en déduit

variable principale
 y est une variable libre

donc $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\text{Ker } A$ et

$$\text{Ker } A = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$