TD12 Correction partielle

Exercice 1 a) $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Comme λI_2 et N commutent, on a

$$\forall n \geq 0, \quad T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k I_2 N^{n-k}.$$

Or $N^2 = 0$ et $N^\ell = 0$ pour $\ell \geq 2$, donc

$$T^n = \lambda^n I_2 + n \lambda^{n-1} N = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

b) Si $\lambda \neq 0$, T est inversible car $\det T = \lambda^2 \neq 0$

et $T^{-1} = \frac{1}{\lambda^2} \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ (formule de Cramer)

$T^{-1} = \lambda^{-1} I_2 + (-\lambda^{-2}) N$ donc comme en a),

$$T^{-n} = (\lambda^{-1} I_2)^n + n (\lambda^{-1} I_2)^{n-1} (-\lambda^{-2}) N$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^{-n} & 0 \\ 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \lambda^{-(n-1)} & 0 \\ 0 & \lambda^{-(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^{-n} & -n\lambda^{-n-1} \\ 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix}$$

On pourrait aussi appliquer directement la formule de Cramer à la formule obtenue en a) pour T^n.

Exercice 2 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $A = D + N$, $DN = ND = N$ et D diagonalisable (car diagonale) et N nilpotente.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ A est triangulaire supérieure et $Sp(A) = \{1,2,3\}$ donc $\mathrm{Card}\, Sp(A) = 3$ et A est déjà diagonalisable.

On a donc $A = D + N$ avec $A = D$ et $N = 0$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculons le polynôme caractéristique de A.

On a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 1 & -2 & X-3 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-2)(X^2-4X+4)$

$= (X-2)^3$. Ainsi A est trigonalisable et $Sp(A) = \{2\}$.

En particulier $F_2(A) = K^3$ et $(A-2I_3)^3 = 0_3$. Ainsi on peut écrire $A = 2I_3 + N$ où $N = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$2I_3$ est scalaire donc diagonalisable et

$(2I_3)N = N(2I_3)$. Ainsi la décomposition de Dunford-Jordan de A est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & X-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix}$

$= (X-2)^2 \begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-2)^2(X^2-2X+1) = (X-2)^2(X-1)^2$.

On a $Sp(A) = \{1,2\}$ et $\chi_A(X)$ scindé donc A est trigonalisable.

Ainsi $K^4 = F_1(A) \oplus F_2(A)$.

Déterminons une base de $F_1(A)$:

$$F_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_4)^2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$F_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_4)^2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Dans la décomposition de Dunford-Jordan de A, la matrice diagonalisable D est la matrice de l'unique endomorphisme de K^4 qui agit par multiplication par 1 sur les vecteurs de $F_1(A)$ et 2 sur les vecteurs de $F_2(A)$. On a donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$N = A - D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$ On peut vérifier que

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = ND$$ et que $N^2 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)$ donc A est trigonalisable et $Sp(A) = \{1, 2\}$.

$$F_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3)^2 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$F_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la décomposition de Dunford-Jordan $A = D + N$ de A, la matrice D est la matrice de l'unique endomorphisme d de $\mathbb{K}^3$ qui multiplie les vecteurs de $F_1(A)$ par 1 et les vecteurs de $F_2(A)$ par 2.

Dans la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ on a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Posons $P = P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(d) = P \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(d)\, P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $N = A - D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie que l'on a bien

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$$

La décomposition de Dunford-Jordan de A est donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

a) On a

$$\chi_A(X) = \begin{pmatrix} X+2 & -2 & 1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 2 & X \end{pmatrix} = (X-1)\begin{pmatrix} X+1 & 1 \\ -1 & X \end{pmatrix}$$
$$= (X-1)(X(X+2)+1) = (X-1)(X+1)^2.$$

b) Les valeurs propres de A dans $\mathbb{R}$ sont les racines de $\chi_A(X)$, c'est-à-dire 1 et -1.

c) La valeur propre 1 est de multiplicité algébrique 1, son sous-espace caractéristique est donc égal à son sous-espace propre et de dimension 1. On a

$$F_1(A) = E_1(A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Déterminons à présent le sous-espace caractéristique associé à -1. Il est de dimension 2 et coïncide avec $\operatorname{Ker}((A+I_3)^2)$. Commençons par le sous-espace propre.

$$E_{-1}(A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Enfin calculons $(A+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que

$$F_{-1}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

d) On construit une base de $\mathbb{R}^3$ commençant par un vecteur propre de valeur propre 1, un vecteur propre de valeur propre -1 et un vecteur de $F_{-1}(A) \setminus E_{-1}(A)$. On peut donc choisir

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Par construction de $\mathcal{B}$, la matrice $T = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure. On peut la calculer, ce qui donne

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

e) Le polynôme minimal de A est un diviseur de $\chi_A(X)$ dont les racines sont 1 et -1, il y a donc deux possibilités, $(X-1)(X+1)^2$ ou $(X-1)(X+1)$. On calcule

$$(A-1)(A+1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ainsi le polynôme minimal de A est $(X-1)(X+1)^2$.

f) Posons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $T = D + N$ et $DN = ND$. Ainsi pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(tT) = \exp(tD)\exp(tN) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & -te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

g) On écrit le vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. On a $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P\exp(tT) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} - te^{-t} \\ 0 \\ te^{-t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}$

$\forall n \geq 0$, on a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

On cherche donc à résoudre le système

$$X_{n+1} = A X_n, \qquad X_n \in \mathbb{R}^3$$

Calculons $\chi_A(x)$

On a $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -45 & 39 & x-11 \end{vmatrix}$

$$= x \begin{vmatrix} x & -1 \\ 39 & x-11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -45 & x-11 \end{vmatrix}$$

$$= x(x^2 - 11x + 39) - 45$$
$$= x^3 - 11x^2 + 39x - 45$$

On cherche à factoriser ce polynôme, cherchons une racine évidente

Astuce : Si un polynôme de la forme
$X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ avec $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}$,
ses racines dans $\mathbb{Q}$ sont des entiers diviseurs de a_0.

On cherche donc parmi les diviseurs de 45.
1 et -1 ne sont pas racine de $\chi_A(x)$ mais
$\chi_A(3) = 0$.
Factorisons $\chi_A(x)$ par $x - 3$.
On peut poser la division euclidienne

$$
\begin{array}{l|l}
X - 11X^2 + 39X - 45 & X-3 \\
\hline
-(X^3 - 3X^2) & X^2 - 8X + 15 \\
= -8X^2 + 39X - 45 & \\
-(-8X^2 + 24X) & \\
= 15X - 45 & \\
-(15X - 45) & \\
= 0 &
\end{array}
$$

donc $X^3 - 11X^2 + 39X - 45 = (X-3)(X^2 - 8X + 15)$

On factorise $X^2 - 8X + 15$

$\Delta = 64 - 60 = 4$, $X^2 - 8X + 15 = (X-3)(X-5)$

donc $\chi_A(X) = (X-3)^2(X-5)$.

Ainsi A est trigonalisable et $Sp(A) = \{3, 5\}$.

<u>Trigonalisons A</u> $m_{alg}(3) = 2$ et $m_{alg}(5) = 1$.

Ainsi $\dim F_5(A) = 1$ et $\dim E_5(A) \geq 1$ donc

$\dim E_5(A) = \dim F_5(A) = 1$ et $E_5(A) = F_5(A)$

$$E_5(A) = \mathrm{Ker}(A - 5I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 45 & -39 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$\dim F_3(A) = 2$ et $\dim E_3(A) \geq 1$ donc

$\dim E_3(A) \in \{1, 2\}$ on ne peut pas dire plus sans calcul

$$E_3(A) = \mathrm{Ker}(A - 3I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 45 & -39 & 8 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$\dim E_3(A) = 1$ et $E_3(A) \subsetneq F_3(A)$.

Ainsi $F_3(A) = \mathrm{Ker}((A - I_3)^2)$.

On a $(A - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 1 \\ 45 & -30 & 5 \\ 25 \cdot 9 & -25 \cdot 6 & 25 \end{pmatrix}$

On sait a priori que $\mathrm{rg}(A - I_3)^2 = 1$ donc les 3 lignes sont colinéaires.

Ainsi $\operatorname{Ker}(A-3I_3)^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, 9x - 6y + z = 0 \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -9x+6y \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

On a $\{0\} \subsetneq E_3(A) \subsetneq F_3(A)$

et $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}}_{\in E_3(A)}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $F_3(A)$

On obtient une base de $\mathbb{R}^3$ en concaténant les bases de $F_3(A)$ et $F_5(A)$ ainsi obtenues.

$$\mathcal{B} = \Bigg(\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}}_{\in E_3(A)}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{F_3(A)}, \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}}_{\in E_5(A)}}_{F_5(A)} \Bigg)$$

Posons $P = P_{\mathcal{B}_{can} \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & 25 \end{pmatrix}$.

On a donc $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = T$

<u>Déterminons α</u> : On a $PT = AP$ donc

$$\begin{pmatrix} \times & \alpha & \times \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & 1 & \times \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad \text{et } \alpha = 1.$$

Ainsi $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & 25 \end{pmatrix}$.

On a donc $A^n = P T^n P^{-1}$ $\forall n \geq 0$

et $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

Posons $Y_n = P X_n$ de sorte que

$X_{n+1} = A X_n \iff Y_{n+1} = T Y_n$

et $\forall n \geq 0$, $Y_n = T^n Y_0$.

Calculons $T^n = \left(\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^n$

ces deux matrices commutent

et la formule du binome donne

$$T^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

On a donc $Y_n = \begin{pmatrix} 3^n v_0 + n 3^{n-1} v_1 \\ 3^n v_1 \\ 5^n v_2 \end{pmatrix}$ où $Y_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

En calculant P^{-1}, on pourrait alors déterminer explicitement u_n en termes de u_0, u_1, u_2. On peut simplifier un peu les calculs en remarquant que l'égalité

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

implique l'existence de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq

$\forall n \geq 0$, $u_n = \alpha 3^n + \beta n 3^{n-1} + \gamma 5^n$. On peut déterminer α, β, γ en résolvant le système

$$\begin{cases} \mu_0 = \alpha + \gamma \\ \mu_1 = 3\alpha + \beta + 5\gamma \\ \mu_2 = 9\alpha + 6\beta + 25\gamma \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = \mu_0 \\ \beta + 2\gamma = \mu_1 - 3\mu_0 \\ 6\beta + 16\gamma = \mu_2 - 9\mu_0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = \mu_0 \\ \beta + 2\gamma = \mu_1 - 3\mu_0 \\ 4\gamma = \mu_2 - 6\mu_1 + 9\mu_0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \alpha = \mu_0 - \gamma = -\frac{5}{4}\mu_0 + \frac{3}{2}\mu_1 - \frac{1}{4}\mu_2 \\ \beta = \mu_1 - 3\mu_0 - 2\gamma = 4\mu_1 + \frac{3}{4}\mu_0 - \frac{1}{2}\mu_2 \\ \gamma = \frac{1}{4}(\mu_2 - 6\mu_1 + 9\mu_0) \end{cases}$$