

TD11, correction partielle

Exercice 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ On calcule polynôme caractéristique de A

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-3 & 1 \\ -2 & X \end{vmatrix} = X(X-3) + 2 = X^2 - 3X + 2$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad \text{racines } \frac{3 \pm 1}{2} = 2 \text{ et } 1$$

$$\text{donc } Sp(A) = \{1, 2\} \quad \chi_A(X) = (X-1)(X-2)$$

Ainsi $\dim F_1(A) = \dim E_1(A) = 1$ $\dim F_2(A) = \dim E_2(A) = 1$
la matrice A est donc diagonalisable

$$\text{et } \pi_A(X) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda) = (X-1)(X-2) = \chi_A(X).$$

$$F_1(A) = E_1(A) = \text{Ker}(A - I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

$$F_2(A) = E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$

On a donc $Sp(B) = \{1\}$ et $m_{\text{alg}}(1) = \dim F_1(B) = 2$

Ainsi $F_1(B) = K^2$.

Remarquons que $B \neq I_2$ donc $E_1(B) = \text{Ker}(B - I_2) \neq K^2$

Ainsi $E_1(B) \subsetneq F_1(B)$ et $E_1(B) \neq \{0_{K^2}\}$ car $1 \in Sp(B)$

donc $m_{\text{gér}}(1) = \dim E_1(B) = 1$ et $m_{\text{gér}}(1) < m_{\text{alg}}(1)$ donc B n'est pas diagonalisable.

Ainsi $\pi_B(X) \mid \chi_B(X)$ et $\pi_B(X)$ n'est pas à racines simples
donc $\pi_B(X) = (X-1)^2$.

$$E_1(B) = \text{Ker}(B - I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \chi_C(X) = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & -1 \\ 1 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1) \left((X-3)(X-1) + 1 \right)$$

$$= (X-1) (X^2 - 4X + 4) = (X-1)(X-2)^2$$

donc $\text{Sp}(C) = \{1, 2\}$ et $m_{\text{alg}}(1) = \dim F_1(C) = 1$

$$m_{\text{alg}}(2) = \dim F_2(C) = 2$$

Comme $\{0_{K^3}\} \subsetneq E_1(C) \subset F_1(C)$ on a $E_1(C) = F_1(C)$
et

$$F_1(C) = E_1(C) = \text{Ker}(C - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Déterminons $E_2(C)$ et $m_{\text{ges}}(2)$

$$E_2(C) = \text{Ker}(C - 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : on ne change pas le noyau d'une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes.

$$E_2(C) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad m_{\text{ges}}(2) = \dim E_2(C) = 1.$$

donc $m_{\text{ges}}(2) < m_{\text{alg}}(2)$ et C n'est pas diagonalisable

$$\text{On a donc } (X-1)(X-2) \mid \pi_C(X) \mid \chi_C(X) = (X-1)(X-2)^2$$

Comme $\pi_C(X)$ n'est pas simplement scindé, on a

$$\pi_C(X) = (X-1)(X-2)^2.$$

Reste à déterminer $F_2(C)$: comme $\dim F_2(C) = 2$,

$\dim E_2(C) = 1$ et $E_2(C) \subsetneq \text{Ker}((C - I_3)^2) \subset F_2(C)$,
on a $F_2(C) = \text{Ker}((C - I_3)^2)$.

$$(C - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$F_2(C) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Pq on a bien $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $E_2(C) \subsetneq F_2(C)$.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \chi_D(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 2 & X-3 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X & -1 \\ 2 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)(X^2 - 3X + 2) = (X-1)^2(X-2)$$

donc $\text{Sp}(D) = \{1, 2\}$ $m_{\text{alg}}(1) = \dim F_1(D) = 2$

$$m_{\text{alg}}(2) = \dim F_2(D) = 1$$

Donc $E_2(D) = F_2(D)$

$$E_2(D) = \text{Ker}(D - 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Calculons $m_{\text{ges}}(1)$ et $E_1(D)$

$$E_1(D) = \text{Ker}(D - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi $\dim E_1(D) = 2 = m_{\text{ges}}(1)$ et donc $E_1(D) = F_1(D)$.

$\chi_D(X)$ est scindé et $m_{\text{ges}}(\lambda) = m_{\text{alg}}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(D)$ donc D est diagonalisable et donc $\Pi_D(X) = (X-1)(X-2)$.

Exercice 2 a) $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & 0 \\ -1 & X & 1 \\ 1 & 0 & X-2 \end{vmatrix}$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} X & 1 \\ 0 & X-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)X(X-2) + X-2 + 1$$

$$= (X-1)(X(X-2) + 1) = (X-1)(X^2 - 2X + 1) = (X-1)^3.$$

b) les valeurs propres de A sont les racines de $\chi_A(X)$

donc $\text{Sp}(A) = \{1\}$ Il n'y a qu'une valeur propre

à considérer.

Calculons le sous-espace propre.

$$E_1(A) = \text{Ker}(A - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Par ailleurs, $m_{\text{alg}}(1) = 3$ donc $\dim F_1(A) = 3$

$$\text{Ainsi } \mathbb{R}^3 = F_1(A).$$

On obtient donc, sans calcul, $F_1(A) = \mathbb{R}^3$.

(on pourrait aussi appliquer le théorème de Cayley-Hamilton qui fournit l'égalité $\chi_A(A) = (A - I_3)^3 = 0$ et donc $F_1(A) = \text{Ker}(A - I_3)^3 = \mathbb{R}^3$.)

$$c) \text{ Calculons } \text{Ker}(A - I_3)^2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Si $v \notin \text{Ker}(A - I_3)^2$, posons $v_2 = (A - I_3)v$ et $v_1 = (A - I_3)^2 v$.

Montrons que la famille (v_1, v_2, v) est libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tq $av_1 + bv_2 + cv = 0_{\mathbb{R}^3}$.

En appliquant $(A - I_3)^2$, on a

$$c(A - I_3)^2 v = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \text{car} \quad (A - I_3)^3 v = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

C'est-à-dire $cv_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Comme $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ on a $c = 0$.

Ainsi $av_1 + bv_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Appliquons $(A - I_3)$, on obtient

$$b(A - I_3)v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \text{c'est-à-dire} \quad bv_1 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

De même, $b = 0$.

Ainsi $av_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$ et donc $a = 0$ puisque $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

Donc $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ et la famille (v_1, v_2, v) est libre. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, la famille (v_1, v_2, v) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Notons que $f(v) = Av = v + (A - I_3)v = v + v_2$
 $f(v_2) = Av_2 = v_2 + (A - I_3)v_2 = v_2 + v_1$
 et $f(v_1) = Av_1 = v_1 + (A - I_3)v_1 = v_1$
 (car $(A - I_3)^3 v = 0$ donc $(A - I_3)v_1 = 0$).

Dans la base $B = (v_1, v_2, v)$ on a donc

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Choisissons $v \notin \text{Ker}(A - I_3)^2$. Par exemple $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a alors $v_2 = (A - I_3)v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_1 = (A - I_3)^2 v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

En prenant $P = P_{B_{\text{can}} \leftarrow B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ on a donc

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 $A = \begin{pmatrix} 22 & -9 \\ 25 & -8 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-22 & 9 \\ -25 & x+8 \end{vmatrix} = x^2 - 14x - 22 \cdot 8 + 9 \cdot 25$$

$$= x^2 - 14x + 225 - 176 = x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$$

Ainsi $\text{Sp}(A) = \{7\}$ et $m_{\text{alg}}(7) = \dim F_7(A) = 2$ donc $F_7(A) = K^2$

$$E_7(A) = \text{Ker}(A - 7I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 15 & -9 \\ 25 & -15 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Considérons la base $B = (v_1, v_2)$ de $K^2 = F_7(A)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Comme (v_1) est une base de $E_7(A)$ et (v_1, v_2) une base de $F_7(A)$, la matrice de f_A dans la base B est

$$\text{Mat}_B(f_A) = \begin{pmatrix} 7 & \alpha \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \text{ est un nombre à déterminer}$$

Prenons $P = P_{B \leftarrow B_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \text{Mat}_B(f_A) = \begin{pmatrix} 7 & \alpha \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, on a

alors $P^{-1}AP = T$. Déterminons α en utilisant la relation $AP = PT$

$$AP = \begin{pmatrix} x & 22 \\ x & x \end{pmatrix} \quad PT = \begin{pmatrix} x & 3\alpha + 7 \\ x & x \end{pmatrix} \quad \text{on a donc } 3\alpha + 7 = 22 \text{ et } \alpha = 5$$

Ainsi $T = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\text{Sp}(A) = \{7\} \quad \text{donc } x-7 \mid \pi_A(x) \mid \chi_A(x) = (x-7)^2$$

$$\text{donc } \pi_A(x) = (x-7)^k \quad k=1 \text{ ou } 2$$

Comme $E_7(A) \neq F_7(A)$, A n'est pas diagonalisable donc $\pi_A(x)$ n'est pas simplement linéaire donc $\pi_A(x) = (x-7)^2$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ -2 & x-1 & 2 \\ -3 & 1 & x+2 \end{vmatrix} \stackrel{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{=} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & x-1 \\ -2 & x-1 & 0 \\ -3 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1) \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ -2 & x-1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} (x-1) \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -2 & x-1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^2(x+1) \quad \text{donc } \text{Sp}(B) = \{1, -1\} \text{ et}$$

$$m_{\text{alg}}(1) = \dim F_1(B) = 2 \quad m_{\text{alg}}(-1) = \dim F_{-1}(B) = 1$$

On a donc $m_{\text{ger}}(-1) = \dim E_{-1}(B) = 1$ et

$$1 \leq m_{\text{ger}}(1) = \dim E_1(B) \leq 2$$

$$\begin{aligned} E_{-1}(B) = F_{-1}(B) &= \text{Ker}(B + I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1(B) &= \text{Ker}(B - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Enfin $F_1(B) \neq E_1(B)$ car $\dim F_1(B) = 2$ et $\dim E_1(B) = 1$

donc $E_1(B) \subsetneq \text{Ker}((B - I_3)^2) \subset F_1(B)$ et $F_1(B) = \text{Ker}((B - I_3)^2)$

$$\text{On a } (B - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } F_1(B) &= \text{Ker}((B - I_3)^2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \mid -x + z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Pour $B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ c'est une base de $F_1(B)$ avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ base de $E_1(B)$

$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ base de $E_{-1}(B) = F_{-1}(B)$.

Ainsi $B = B_1 \cup B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de trivialisaton de B et

$$T = \text{Mat}_B(1_B) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ pour un certain } \alpha \in K.$$

$$\text{Pour } P = P_{B \leftarrow B_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ On a } T = P^{-1} B P$$

$$\text{L'egalite } PT = BP \text{ fournit } PT = \begin{pmatrix} * & \alpha & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = BP = \begin{pmatrix} * & -1 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

d'où $\alpha = -1$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Comme $\text{Sp}(B) = \{1, -1\}$, $(x-1)(x+1) \mid \pi_B(x) \mid \chi_B(x) = (x-1)^2(x+1)$
donc $\pi_B(x) = (x+1)(x-1)^k$ avec $k = 1$ ou 2

Comme $E_1(B) \neq F_1(B)$, B n'est pas diagonalisable donc $\pi_B(X)$ n'est pas simplement scindé et donc $\pi_B(X) = (X+1)(X-1)^2$.

Exercice 5 $A \in \mathcal{M}_n(K)$ $A^{50} = 0_n \Rightarrow A$ nilpotente
 on a donc $\pi_A(X) = X^k$ avec $k \leq n$ donc
 $A^n = A^k A^{n-k} = 0_n A^{n-k} = 0_n$

Exercice 4 a) Vrai c'est du cours.

b) Faux. Si le polynôme caractéristique est simplement scindé, alors le polynôme minimal divise (car il divise le polynôme caractéristique) et la matrice est diagonalisable. Mais la réciproque est fautive. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable car } E_1(A) = \mathbb{R}^2$$

mais $\chi_A(X) = (X-1)^2$ n'est pas simplement scindé.

c) Vrai, c'est du cours.

d) Vrai, c'est du cours.

e) Faux. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$\text{On a } \chi_A(X) = (X-3)(X^2+1). \quad S_p(A) = \{3\}$$

$$m_{\text{alg}}(3) = 1 \text{ donc } m_{\text{geo}}(3) = 1.$$

Mais A n'est pas diagonalisable car

$$\mathbb{R}^3 \neq E_3(A) = \sum_{\lambda \in S_p(A)} E_\lambda(A).$$

Pour pouvoir en déduire que A est diagonalisable il faudrait en plus supposer $\chi_A(X)$ scindé sur $\mathbb{R}$.