

## TD 10, correction partielle

### Exercice 1

$$a) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + A$$

donc  $A^2 - A - 2I_3 = 0_3$  et  $X^2 - X - 2$  annule  $A$

b)  $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ ,  $A$  est annihilée par un polynôme scindé à racines simples donc  $A$  est diagonalisable.

c)  $A$  est diagonalisable annihilée par  $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$

donc  $\text{Sp } A \subset \{-1, 2\}$ . Comme  $A \neq -I_3$ ,  $\text{Sp } A \neq \{-1\}$

Comme  $A \neq 2I_3$ ,  $\text{Sp } A \neq \{2\}$ . Donc  $\text{Sp } A = \{-1, 2\}$ .

Ainsi  $\chi_A(X)$  est scindé et ses racines sont  $-1, 2$ .

Comme  $\deg \chi_A(X) = 3$ , on a deux possibilités

$$\chi_A(X) = (X+1)^2(X-2) \text{ ou } (X+1)(X-2)^2.$$

On peut utiliser la formule  $\chi_A(X) = X^3 - \text{Tr}(A)X^2 + \dots$  pour trancher entre ces deux cas.

On a  $\text{Tr}(A) = 0$ , donc nécessairement  $\chi_A(X) = (X+1)^2(X-2)$

Ainsi, comme  $A$  est diagonalisable,

$$\dim E_{-1}(A) = m_a(-1) = 2 \text{ et } \dim E_2(A) = m_a(2) = 1.$$

### Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad A \text{ est annihilée par } X - a.$$

Comme  $\deg(X - a) = 1$ , on a  $\pi_A(X) = X - a$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \chi_A(X) = (X-a)^3 \text{ et } \pi_A(X) \mid \chi_A(X)$$

donc  $\pi_A(X) = (X-a)^i$  pour un  $1 \leq i \leq 3$ .

$$A - aI_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_3 \text{ donc } i \neq 1$$

$$(A - aI_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_3 \text{ donc } i \neq 2, \text{ donc } \pi_A(X) = (X-a)^3.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{de même que précédemment}$$

$$\pi_A(X) = (X-a)^i \quad \text{pour un } 1 \leq i \leq 3$$

$$A - aI_3 \neq 0_3 \quad \text{donc } i \neq 1$$

$$(A - aI_3)^2 = 0_3 \quad \text{donc } \pi_A(X) = (X-a)^2.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad \chi_A(X) = (X-a)^2(X-b)$$

$$\text{donc } \pi_A(X) \mid (X-a)^2(X-b)$$

De plus  $\text{Sp } A = \{a, b\}$  et les valeurs propres de  $A$  sont racines de  $\pi_A(X)$ . Ainsi  $(X-a)(X-b) \mid \pi_A(X)$

Donc  $\pi_A(X) = (X-a)^i(X-b)$  pour un  $1 \leq i \leq 2$

$$(A - aI_3)(A - bI_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b & 1 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_3$$

$$\text{donc } \pi_A(X) = (X-a)^2(X-b)$$

les autres polynômes minimaux sont

$$(X-a)(X-b), \quad (X-a)^4, \quad (X-a)^3, \quad (X-a)^2, \quad (X-a)^2(X-b)^2, \\ (X-a)^2(X-b)$$

Exercice 3 a)  $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^4 = 0_4.$

b) Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tels que  $aJ^0 + bJ^1 + cJ^2 + dJ^3 = 0_4$ .

Alors

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = d.$$

La famille  $(J^0, J^1, J^2, J^3)$  est donc libre.

c) Il n'existe donc pas de scalaires  $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$  tels que  $aJ^0 + bJ^1 + cJ^2 + dJ^3 = 0_4$ , c'est-à-dire que  $J$  n'est pas annihilé par un polynôme de degré  $\leq 3$ .

Ainsi  $\deg \pi_J(X) \geq 4$ .

d)

On a  $J^4 = I_4$ . le polynôme  $X^4 - 1$  est donc le polynôme unitaire de plus petit degré annulant  $J$ . Donc  $\pi_J(X) = X^4 - 1$

On déduit de l'exercice 3 que

$$Sp(J) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda^4 = 1 \} = \{ 1, -1, i, -i \}.$$

e)  $\text{Card}(Sp(J)) = 4$ , la matrice  $J$  est donc diagonalisable.

De plus

$$X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i) \mid \chi_J(X)$$

comme  $\deg \chi_J(X) = 4$  et  $\chi_J$  est unitaire, on a

$$\chi_J(X) = X^4 - 1 = \pi_J(X).$$

Exercice 4 a)  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  $\pi_M(X) = X-1$  et  $\chi_M(X) = (X-1)^2$ .

Cette matrice est diagonalisable car  $K^2 = E_1(M)$ .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \chi_M(X) = (X-1)^2(X-2)^2$$

$M$  est annihilée par  $(X-1)^2(X-2)$  donc

$$\pi_M(X) \mid (X-1)^2(X-2). \text{ Ainsi } \pi_M(X) \neq \chi_M(X).$$

Montrons que  $M$  n'est pas diagonalisable.

$$Sp(M) = \{1, 2\}. \quad E_2(M) = \text{Vect}(e_3, e_4)$$

$$E_1(M) = \text{Vect}(e_1)$$

$\dim E_1(M) + \dim E_2(M) = 3 < 4$  donc  $M$  n'est pas diagonalisable.

Ainsi  $(X-1)(X-2) \mid \pi_M(X) \mid (X-1)^2(X-2)$  et  $\pi_M(X)$  n'est pas à racines simples donc  $\pi_M(X) = (X-1)^2(X-2)$

b)  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$   $M$  diagonale donc diagonalisable

$$\chi_M(X) = (X-1)(X-2).$$

les racines de  $\pi_M(X)$  sont 1 et 2 donc  $(X-1)(X-2) \mid \pi_M(X)$

Comme  $(X-1)(X-2)$  annule  $M$ ,  $\pi_M(X) = (X-1)(X-2) = \chi_M(X)$ .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \chi_M(X) = (X-1)^2.$$

Par Cayley-Hamilton,  $\pi_M(X) \mid \chi_M(X)$  donc

$$\pi_M(X) = (X-1)^a \text{ avec } a = 1 \text{ ou } 2.$$

Comme  $M - I_2 \neq 0_2$ , on a  $a = 2$  et  $\chi_M(X) = \pi_M(X)$ .

$\pi_M(X)$  n'est pas simplement scindé donc  $M$  n'est pas diagonalisable.

Exercice 5 a) 1 et -1 sont valeurs propres de  $f$ , donc

$$(X-1)(X+1) \mid \pi_f(X).$$

Comme  $X^2 - X^2$  annule  $f$ , on a  $\pi_f(X) \mid X^2 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$ .

Also  $\pi_1(x) \in \{x^{L-1}, x(x^{L-1}), x^2(x^{L-1})\}.$

Or  $\deg \pi_f(X) \leq \dim E = 3$  donc

$$\pi_1(x) = x^2 - 1 \text{ on } X(x^2 - 1).$$

b) Dans les deux cas,  $\pi_f(x)$  est scindé à racines simples donc  $f$  est diagonalisable.

c) Si  $\pi_f(x) = x(x^2 - 1)$ , alors  $\dim E_0(f) = \dim E_1(f) = \dim E_{-1}(f) = 1$

donc  $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$  avec  $\{a, b, c\} = \{0, 1, -1\}$   
(6 possibilités).

S:  $\pi_f(x) = x^2 - 1$  aber  $\dim E_+(f) = 2$   $\dim E_-(f) = 1$

oder  $\dim E_1(1) = 1$   $\dim E_{-1}(1) = 2$ .

dann  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{or } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Si  $\pi_f(x) = x(x^2-1)$ , on a  $\chi_f(x) = x(x^2-1)$

Soit  $\pi_f(X) = X^2 - 1$  et  $\dim E_2(f) = 2$ ,  $\chi_f(X) = (x-1)^2(x+1)$

---

  $\dim E_1 = 1, \quad \chi_f(x) = (x-1)(x+1)^2$