

TD 1, correction partielle

Exercice 1

a) Vérifions que la famille B est libre.

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont tels que $a + b(X+1) + c(X^2+X+1) = 0$

Alors $a + b + c + (b+c)X + cX^2 = 0$ donc

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

(système échelonné)

On en déduit que la famille B est libre.

Elle est de longueur 3 et $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$b) [1]_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [1+X]_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [1+X+X^2]_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } P_{B_0 \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Déterminons l'inverse de $P_{B_0 \leftarrow B}$ par la méthode du pivot (opérations élémentaires sur les lignes)

$$P_{B_0 \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{B_0 \leftarrow B}^{-1}$$

Ainsi $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_0} = P_{\mathcal{B}_0 \leftarrow \mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $[X^2]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$[X^2]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_0} [X^2]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a bien $X^2 = -(1+X) + (1+X+X^2)$.

$(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$ donc $[(X-1)^2]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[(X-1)^2]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_0} [(X-1)^2]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a bien $X^2 - 2X + 1 = 3 - 3(1+X) + (1+X+X^2)$

Exercice 2

a) Pour $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a $f(M_1 + M_2) = A(M_1 + M_2)$
 $= AM_1 + AM_2 = f(M_1) + f(M_2)$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $f(\lambda M_1) = A(\lambda M_1) = \lambda AM_1 = \lambda f(M_1)$
 donc f est une application linéaire.

b) $f(E_{1,1}) = A E_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 E_{2,1}$

$$f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 E_{2,2}$$

$$f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 3 E_{2,1}$$

$$f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = E_{2,1} + 3 E_{2,2}$$

$$\text{Ainsi } [f(E_{1,1})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [f(E_{1,2})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[f(E_{2,1})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [f(E_{2,2})]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que

$$aI_2 + bA + cE_{1,1} + dAE_{1,1} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 2b & 3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b \\ 2b+2d & a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \\ 2b+2d=0 \\ a+3b=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \swarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \\ 2d=0 \\ a=0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \quad \text{et} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}$$

la famille $\mathcal{B}'$ est donc libre

Comme $\mathcal{B}'$ est de longueur 4 et $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) = 4$,
c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$$d) I_2 = E_{1,1} + E_{2,2} \rightsquigarrow [I_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = E_{1,2} + 2E_{2,1} + 3E_{2,2} \rightsquigarrow [A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$AE_{1,1} = 2E_{2,1} \rightsquigarrow [AE_{1,1}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [E_{1,1}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $P_{B \leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) On a $\text{Mat}_{B'}(f) = P_{B \leftarrow B'}^{-1} \text{Mat}_B(f) P_{B \leftarrow B'}$

On commence par calculer $P_{B \rightarrow B'}^{-1}$ par la méthode du pivot

$$P_{B \leftarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow -L_3$$

$$L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = P_{B \leftarrow B'}^{-1}$$

On a donc

$$\text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

f) Pour vérifier si la matrice A est inversible, on essaye de la transformer par opérations élémentaires sur les lignes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

forme échelonnée à

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonale inversible
donc la
matrice est
inversible

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculons Ker f. Si $f(M) = 0$ alors $AM = 0$

et donc $M = A^{-1}AM = A^{-1}0 = 0$
donc $\text{Ker } f = \{0\}$

Ainsi f est un isomorphisme de $M_2(\mathbb{C})$ sur $M_2(\mathbb{C})$.

g) On a $\text{Mat}_{\mathbb{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathbb{B}}(f)^{-1}$

$$\text{Mat}_{\mathbb{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_4$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow -\frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2 \end{array} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_B(f)^{-1} \right.$$

$$\text{donc } \text{Mat}_B(f^{-1}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

$$a) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

C'est un système à 4 inconnues et une équation avec 3 variables libres. Ainsi $\dim \text{Ker } f = 3$.

$$\text{On a } \text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $\text{Ker } f$ et de longueur 3, c'est donc une base de $\text{Ker } f$.

$$b) \text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Échelonnons le système en utilisant la méthode du pivot.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

variables libres

système échelonné à deux variables libres
donc $\dim \text{Ker } f = 2$.

$$\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Comme $\dim \text{Ker } f = 2$, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Ker } f$.

$$c) \text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{On a } \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

On a deux variables libres donc $\dim \text{Ker } f = 2$ et

$$\text{Ker } f = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right). \text{ De même}$$

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Ker } f.$$