Contrôle Final
Mardi 13 janvier 2026

Durée : 2h00. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Les téléphones doivent être déposés éteints dans les sacs en bas de l'amphi.
Le fait de conserver sur soi un téléphone est considéré comme une fraude.
Justifiez soigneusement vos résultats. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (4 points = 1 +1 +2) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $A^5 = 0_n$. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A.

b) Donner la décomposition de Dunford–Jordan de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (7,5 points = 1 + 0,5 + 2 + 1 +1 +1 +1) On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -8 & -8 & -7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique de A (on pourra vérifier que le résultat obtenu coïncide avec $X^3 + X^2 - 5X + 3$).

b) Déterminer les valeurs propres de A.

c) Déterminer les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de A.

d) Est-ce que A est diagonalisable ?

e) Déterminer une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$.

f) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice nilpotente M telles que $T = D + M$ et $TM = MT$.

g) En déduire une matrice diagonalisable B et une matrice nilpotente N telles que $A = B + N$ et $BN = NB$.

Exercice 3 (6 points = 0,5 + 1 +1,5 +2 +1) Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles vérifiant

$$\forall n \geqslant 0, \qquad \begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n \\ y_{n+1} &= -x_n + 3y_n \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

a) Écrire le système sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

pour une certaine matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Déterminer les valeurs propres de A.

c) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ? Le cas échéant, la diagonaliser ou la trigonaliser.

d) Donner une formule pour A^n pour tout entier $n \geqslant 0$ (on pourra utiliser une décomposition de Dunford–Jordan de A).

e) En déduire une formule pour x_n en fonction de n.

Exercice 4 (5 points = 1 + 1,5 + 1,5 +1) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$.

b) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

c) En déduire une formule pour les coefficients de $\exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on rappelle les formules $\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ et $\sin(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$).

d) Plus généralement on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}.$$

Déterminer une formule pour $\exp(tA(x))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.