Feuille 4 : Limites de fonctions et Continuité

Exercice 1 (Une fonction définie par morceaux).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Dessiner le graphe de f.
2. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \to -1, x<-1} f(x)$

(b) $\lim_{x \to -1, x>-1} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 0, x<0} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 0, x>0} f(x)$

(e) $\lim_{x \to \pi, x<\pi} f(x)$

(f) $\lim_{x \to \pi, x>\pi} f(x)$

3. Étudier les limites de f en -1, en 0 et en π.

Exercice 2 (Limites).

Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$
2. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$
3. $\lim_{x \to 4} \dfrac{2x+5}{x-4}$
4. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^9-17}{x^7}$
5. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$
6. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3+2}$
7. $\lim_{x \to 1} |x-1|$
8. $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{|x-1|}$
9. $\lim_{x \to 5} \dfrac{1}{|x-1|}$
10. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1}$
11. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$
12. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+2x+5} - x$
13. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$
14. $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
15. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$
16. $\lim_{x \to 0, x>0} x^x$
17. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1+2\sin(x)}{1+\sqrt{x}}$
18. $\lim_{x \to +\infty} e^{x-\sin x}$

Exercice 3 (Limites et taux d'accroissement). On rappelle que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et que, plus généralement, si f est une fonction dérivable en x_0, on a $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$
3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$
4. $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{\cos(\pi x)}{1-2x}$
5. $\lim_{x \to 1/2} (2x^2+x-1)\tan(\pi x)$
6. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$
7. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$
8. $\lim_{x \to 0, x>0} \sqrt{x} \ln^3 x$
9. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}$, $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 4 (Partie entière).

Dans cet exercice, la notation $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x. Calculer :

1. $\lim_{x \to 0} E(x+1)$
2. $\lim_{x \to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\lim_{x \to +\infty} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 5 (Une limite à partir d'une autre).

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 5$. Déterminer $\lim_{x \to 2} f(x)$.

2. On suppose que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = -2$. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 6 (Continuité à droite et à gauche).

Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

Exercice 7 (Limites et continuité).

1. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_k définie par $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue.
2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x}$. Trouver une application continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}} = f$

Exercice 8 (Nombre de solutions d'une équation).

Montrer que l'équation $x^3 - 15x + 1 = 0$ a trois solutions dans l'intervalle $[-4, 4]$.

Exercice 9 (Solution d'une équation).

Montrer que l'équation $\tan x + \frac{x}{3} = 0$ admet une unique solution sur $[3\pi/4, \pi]$.

Exercice 10 (Bijection et monotonie).

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f_n(x) = x^n - x - 1$

1. Soit $n \geq 2$, montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Soit $n \geq 2$, montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et converge vers une limite ℓ.
4. On va montrer par l'absurde que $\ell = 1$. On suppose ainsi que ℓ est strictement supérieur à 1. Justifier que les suites (ℓ^n) et (x_n^n) divergent. Conclure.

Exercice 11 (Une fonction lipschtizienne).

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ vers $[a, b]$.

1. On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ on a
$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$
Montrer que f est continue. En déduire qu'il existe au moins un réel $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = u$. On pourra utiliser la fonction g de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$.
2. On suppose maintenant que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ avec $x \neq y$ on a
$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$
Montrer qu'il existe un unique $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = u$.

Exercice 12 (Surjection).

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

Exercice 13 (Image d'un intervalle. Vrai ou faux ?).

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.

4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

Exercice 14 (Fonction périodique)**.**

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}.$$

Études complètes de fonctions

Exercice 15 (Fraction rationnelle)**.**

On définit une fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

1. Étudier les variations de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de l'expression $f(x) - (x + 2)$.
   En déduire que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote au graphe de f.
4. Déterminer la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 16 (Avec un logarithme)**.**

On note f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = (1 - x)\ln(1 - x) + x$ et g la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g(x) = -\dfrac{\ln(1 - x)}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0, 1[$ et en déduire que f est à valeurs positives.
2. Étudier les variations de g sur $]0, 1[$.
3. Déterminer les limites éventuelles de $g(x)$ pour x tendant vers 0 et pour x tendant vers 1.

Exercice 17 (Avec une exponentielle)**.**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

1. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f.
3. Tracer sommairement la courbe représentative de f.

Exercice 18 (Fonctions trigo)**.**

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sin x + \sin(2x)$.

1. Déterminer son ensemble de définition et sa plus petite période, et discuter sa parité. Au vu de ces informations, choisir un intervalle d'étude approprié.
2. Calculer sa dérivée, puis discuter du signe de celle-ci en fonction de x.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 19 (Limites et asymptotes)**.**

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. On note g la fonction définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Dresser le tableau de variations de g, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$. Déterminer x_0.
2. En déduire les variations de f.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

4. Déterminer les asymptotes au graphe de f.
5. Tracer ce graphe et ses asymptotes, en veillant à faire figurer les tangentes remarquables.

Exercices supplémentaires

Exercice 20 (Encore des limites).
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (x+1)$
3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$
4. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \ln^2 x - \sqrt{x}$
6. $\lim_{x\to0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$
7. $\lim_{x\to1+} \ln x \ln(\ln x)$
8. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$
9. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$

Exercice 21 (Limites et variations).
Soit f une fonction décroissante sur $]0;+\infty[$ telle que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a l'inégalité : $f(x) \geq 0$.

Exercice 22 (Sur les fonctions périodiques).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 23 (Polynômes de degré impair).
Soit n un entier et $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ des réels. On supposera a_n non nul.

1. Si n est impair montrer que l'équation $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ admet au moins une solution réelle.
2. Donner un contre-exemple pour le cas où n est pair.

Exercice 24 (Continuité sur un intervalle stable).
Supposons que f est une fonction continue sur $[0,1]$ et que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour chaque $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 25 (Fonction définie par intervalles).
Étudier la continuité de la fonction $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, sur le domaine de définition.

Exercice 26 (Partie entière et continuité).
Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité en chaque point de son domaine de définition de la fonction : f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, où E dénote la partie entière.

Exercice 27 (Raccordements).
Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles g_m définie sur $]-\infty, 3]$ par $g_m(x) = x - m$ et sur $]3,+\infty[$ par $g(x) = 1 - mx$, est une fonction continue.

Exercice 28 (Fonctions continues à valeurs discrètes).
Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 29 (Continuité et bornes).
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supposée bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supposée continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 30 (Continuité et valeur absolue).
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle l'implication $(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)) \Rightarrow (\lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|)$ est vraie.
2. Remarquer que, pour tout x de I, on a $\sup(f(x), g(x)) = \dfrac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$ et en déduire que, si f et g sont continues, alors la fonction $\sup(f,g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ l'est aussi.