

### Feuille 3 : Suites réelles

**Exercice 1** (Variations).

Étudier la monotonie des suites définies par les termes généraux suivants :

- |   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| 1. Pour tout $n \geq 1$ , $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ | 4. $u_n = (n+1)(n+2) \dots (n+n)$ |
| 2. $u_n = n - 2^n$  | 5. $u_n = \frac{n-1}{n+3}$        |
| 3. $u_n = \frac{e^n}{n!}$ ,                                   | 6. $u_n = n - \sinh(n)$ .         |

**Exercice 2** (Variations et majorant/minorant).

Étudier le sens de variation des suites suivantes. Déterminer également, pour chacune de ces suites, les valeurs de  $\sup_n u_n$  et  $\inf_n u_n$ .

- |                          |                                   |                                  |
|--------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $u_n = 2^n$           | 3. $u_n = 3^{-n}$                 | 5. $u_n = \frac{1}{2n + (-1)^n}$ |
| 2. $u_n = 2^n + \cos(n)$ | 4. $u_n = \frac{1}{n+2 + (-1)^n}$ |                                  |

**Exercice 3** (Des limites).

Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes, définies par leur terme général.

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1. $u_n = \frac{n+2}{2n-1}$                    | 6. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$          | 12. $u_n = \frac{2^n}{n^{100}}$                 |
| 2. $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 3}{n^3 - 1}$       | 7. $u_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$        | 13. $u_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$     |
| 3. $u_n = \frac{3n^2 - 5}{n+4}$                | 8. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | 14. $u_n = (-1)^n \frac{\cos n}{n}$             |
| 4. $u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}}$       | 9. $u_n = \frac{n - (-1)^n}{2n + (-1)^n}$ | 15. $u_n = \cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)$     |
| 5. $u_n = \frac{\sqrt{n+5} + n}{\sqrt{n^2+1}}$ | 10. $u_n = \cos(n\pi)$                    | 16. $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n+3}}$ |
|  | 11. $u_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n - 3^n}$   |   |

**Exercice 4** ( $(\sin(n))_n$ ).

L'objectif de cet exercice est de démontrer que la suite  $(\sin(n))_n$  n'admet pas de limite. On raisonne par l'absurde : on suppose donc qu'il existe un réel  $\ell$  tel que  $\lim_n \sin n = \ell$ .

- En exprimant, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\sin(n+1)$  en fonction de  $\sin n$  et  $\cos n$ , montrer que la suite  $(\cos n)$  admet une limite  $\tilde{\ell}$  et donner une relation entre  $\ell$  et  $\tilde{\ell}$ .
- Quelle autre relation existe-t-il entre  $\ell$  et  $\tilde{\ell}$  ?
- Montrer que, pour tout  $n$ , on a  $\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2 \sin n \cdot \cos 1$ .
- Déterminer la limite de chacun des membres de cette égalité et en déduire que  $\ell = 0$ .
- Conclure.
- Justifier que la suite  $(\sin n)_n$  admet une suite extraite convergente.

**Exercice 5** (Suite monotone).

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de nombres réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

2. Montrer qu'elle converge et que sa limite  $\ell$  vérifie :

$$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1.$$

3. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$ .

**Exercice 6** (Avec des  $\epsilon$ ).

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels différents de  $-1$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{1 + u_n} = 0$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

**Exercice 7** (Rangs pairs et impairs).

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante telle que la sous-suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi convergente.
2. Soit  $(v_n)$  une suite telle que les deux sous-suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers le même réel  $\ell$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

**Exercice 8** (Limites et somme).

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = u_n + v_n$ .

1. On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent. Que peut-on dire de  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?
2. On suppose que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas. Que peut-on dire de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?
3. Donner un exemple de deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergentes telles que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit convergente.

**Exercice 9** (Opérations sur les limites).

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites telles que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donnée par  $w_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$  soit convergente vers 0.

1. En utilisant une identité remarquable, écrire  $w_n$  comme la somme de 2 carrés.
2. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent aussi vers 0.

**Exercice 10** (Suites presque géométriques).

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$ 
  - (a) Justifier qu'il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_{n+1} \geq 5u_n$ .
  - (b) Montrer qu'alors, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq 5^{n-N} u_N$ .
  - (c) En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
2. On suppose à présent que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ 
  - (a) Justifier qu'il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$ .
  - (b) En raisonnant comme avant, montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge cette fois vers 0.

**Exercice 11** (Suite arithmético-géométrique).

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 8$  et la relation de récurrence  $u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + 3$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Résoudre l'équation  $\alpha = \frac{1}{2} \alpha + 3$ .
2. On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_n = u_n - \alpha$ . Écrire  $v_n$  en fonction de  $v_{n-1}$ .
3. Déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
4. Déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$ . Quelle est sa limite ?

**Exercice 12** (Suites adjacentes).

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.
2. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont convergentes.

**Exercice 13** (Suites adjacentes - Encore!).

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  les suites définies pour tout  $n \geq 1$  par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
2. Montrer que la suite  $(v_n)$  est décroissante.
3. Étudier la suite  $(v_n - u_n)$ .
4. Que peut-on dire des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ ? De leur limite éventuelle?

**Exercice 14** (Encadrement).

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \geq 1$  par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}$$

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Montrer que pour tout  $k$  entre 1 et  $n$ , on a :

$$\frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}.$$

3. En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}}.$$

4. Conclure que la suite  $(u_n)$  converge et que sa limite est égale à 1.

**Exercice 15** (Des suites de moyennes).

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 \leq a \leq b$ . On considère les suites formées par les moyennes géométriques et arithmétiques successives.

On note ainsi :  $u_0 = a$ ,  $v_0 = b$  et, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. On suppose dans cette question uniquement que  $a = 0$ . Expliciter les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  en fonction de  $n$  et en déduire leur limite.
2. On suppose dans cette question uniquement que  $a = b$ . Étudier les suites  $u_n$  et  $v_n$ .
3. On suppose que  $a$  est strictement positif.
  - (a) Montrer que, pour tout  $n$ , on a  $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq b$  et  $v_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ .
  - (b) En déduire que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et admettent la même limite.

**Exercice 16** (Moyenne de Cesàro).

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite croissante de limite  $\ell$ . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.
2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n \leq \ell$ . En déduire que  $(v_n)$  converge.
3. On note  $\ell'$  la limite de  $(v_n)$ . Peut-on donner une inégalité entre  $\ell$  et  $\ell'$ ?
4. Établir que  $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

5. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, en déduire que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\ell$ .

**Exercice 17** (Téléscopages!).

1. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie pour tout  $n > 0$  par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

À l'aide de la question 1, montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 18** (Suite récurrente).

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$ .

1. Etudier la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{2x - 1}$  sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ . Vérifier en particulier que  $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$ .
2. Justifier que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n$  est bien défini et appartient à  $[1, +\infty[$ .
3. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
4. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 19** (Une autre suite récurrente).

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence  $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On notera  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \sqrt{1 + x}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et vérifie  $0 \leq u_n \leq 2$ .
2. Montrer par récurrence que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
3. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 20** (Dichotomie).

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ , avec  $a < b$ . On suppose que  $f(a) < f(b)$  et on se donne un réel  $\lambda$  de  $]f(a), f(b)[$ .

On construit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de la façon suivante :

— On pose  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .

— Puis, pour tout  $n \geq 0$  :

— Si  $\lambda < f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ , alors  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  ;

— Sinon,  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = b_n$ .

On note encore, pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{H}_n$  la propriété : «  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$  et  $f(a_{n+1}) \leq \lambda \leq f(b_{n+1})$  ».

1. Montrer que, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ .
2. Énoncer la propriété  $\mathcal{H}_0$  et montrer qu'elle est vérifiée.
3. Soit  $n \geq 0$  un entier naturel tel que  $\mathcal{H}_n$  est vérifiée. Montrer que  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vérifiée.
4. Conclure que, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$  et  $f(a_{n+1}) \leq \lambda \leq f(b_{n+1})$ .
5. En déduire que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes.
6. Que peut-on en déduire ? Et concernant la limite de  $(f(a_n))_n$  et de  $(f(b_n))_n$  ?